

## II. La Teoría del Consumidor

La teoría del consumidor se ocupa de estudiar el comportamiento del agente económico consumidor en el momento de decidir *cuánto* consumir y *cómo* consumir.

### II.1 El conjunto de elección y las canastas de bienes

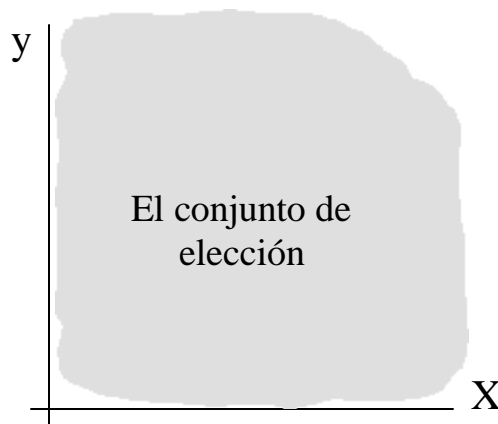
En esta teoría de la elección los consumidores eligen entre múltiples alternativas. En primer lugar se define sobre qué conjunto se realiza la elección.

Definición: Un *conjunto de elección* es aquel espacio sobre el cual los consumidores eligen las cantidades de bienes a consumir. Dado que no se pueden consumir cantidades negativas, el conjunto de elección se limita al ortante positivo en un espacio n-dimensional.

Cada elemento del conjunto de elección es un paquete de cantidades de los n bienes

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Simplificando el análisis a dos bienes X, Y en la economía, el conjunto de elección está formado por el cuadrante positivo de  $\mathbb{R}^2$ .



Cada punto del conjunto de elección es una combinación de cantidades de los bienes. Estas combinaciones llevan el nombre de canastas.

Definición: Una *canasta de consumo*  $(x, y)$  es un paquete de cantidades de los bienes X e Y, la cual está conformada por x unidades del bien X e y unidades del bien Y.

Ejemplo: Si X son Galletas y Y Chocolates,

A = (1,2) es una canasta con 1 unidad de Galletas y 2 unidades de Chocolates.

B = (5,0) es una canasta con 5 unidades de Galletas y 0 unidades de Chocolates.

Nótese que una canasta del tipo C = (-1, 2) no pertenece al conjunto de elección pues no pueden existir cantidades negativas de alguno de los bienes.

### II.2 Las preferencias de los consumidores

El conjunto de elección muestra a todas las posibles canastas de bienes que podrían existir. Puesto que no todas las canastas tienen el mismo valor para el consumidor, afirmamos que los consumidores establecen sus preferencias por las mismas, ordenando las canastas desde las más preferidas a las menos preferidas, y aquellas que son indiferentes entre sí.

Para realizar estas comparaciones se establecen relaciones binarias del siguiente tipo: si A y B son dos canastas de bienes, entonces

$A \succ B$  significa "el consumidor prefiere la canasta A en vez de la canasta B"

$A \sim B$  significa "el consumidor se encuentra indiferente entre las canastas A y B"

$A \succeq B$  significa "la canasta A es al menos tan buena como la canasta B"

Comúnmente a la primera relación se le llama "preferencia estricta", a la segunda "indiferencia" y a la tercera "preferencia débil".

A continuación se establecen supuestos acerca de cómo son las preferencias de los consumidores por las canastas de bienes. Estos supuestos sirven de base para la teoría de la elección.

Supuesto 1: (completitud) Dadas dos canastas A y B que pertenecen al conjunto de elección, siempre se puede afirmar que  $A \succ B$ ,  $B \succ A$  ó  $A \sim B$ .

Este supuesto afirma que cualquier par de canastas del conjunto de elección puede ser comparada de alguna de las formas mencionadas. En otras palabras, no es posible que exista alguna canasta del conjunto que no pueda ser comparada con otra.

Supuesto 2: (transitividad) Sean tres canastas A, B y C que pertenecen al conjunto de elección, si  $A \succ B$  y  $B \succ C$ , entonces  $A \succ C$ . También si  $A \sim B$  y  $B \sim C$ , entonces  $A \sim C$ .

Este supuesto da consistencia lógica a las elecciones de los consumidores. Así se evita inconsistencias tales como  $A \succ A$ , por ejemplo.

Supuesto 3: (no-saturación)  $A \succ B$  si la canasta A tiene más de alguno de los bienes y al menos lo mismo de los demás.

Por ejemplo, si tuviéramos las canastas  $C = (2,1)$ ,  $D = (1,1)$ ,  $E = (1,0)$  y  $F = (1,2)$  podemos afirmar que  $C \succ D$ ,  $D \succ E$ ,  $C \succ E$ ,  $F \succ E$  y  $F \succ D$ . Sin embargo el supuesto 3 no permite establecer nada concluyente acerca de C y F. Para saber cual es la preferida, se debe preguntar directamente al consumidor.

Estos tres supuestos permiten trazar las curvas de indiferencia. Más adelante veremos un supuesto adicional.

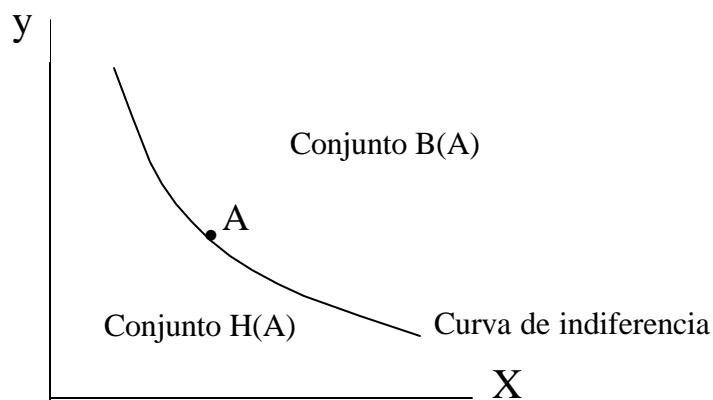
### II.3 Las curvas de indiferencia

Definición: Dada alguna canasta A cualquiera, una *curva de indiferencia que pasa por A* esta formada por un conjunto de canastas tales que todas ellas sean indiferentes a A.

Es decir

$$CI(A) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y) \sim A \}$$

Gráficamente



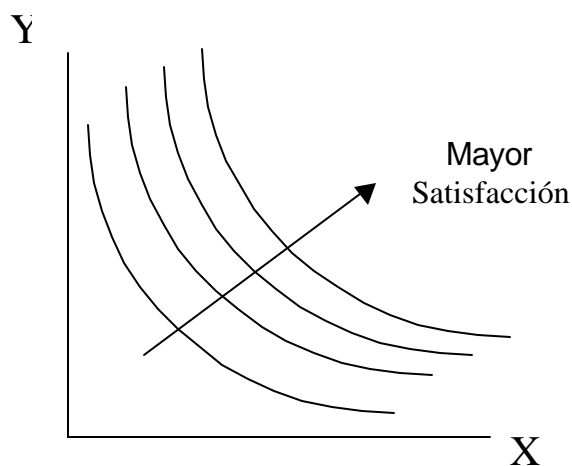
Todas aquellas canastas que estén por encima de la curva de indiferencia son preferidas a la canasta A (recuérdese los supuestos 2 y 3). Asimismo, A es preferida a todas las canastas por debajo de la curva. Formalmente estos conjuntos se definen de la siguiente forma.

$$B(A) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y) \succ A \}$$

$$H(A) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / A \succ (x,y) \}$$

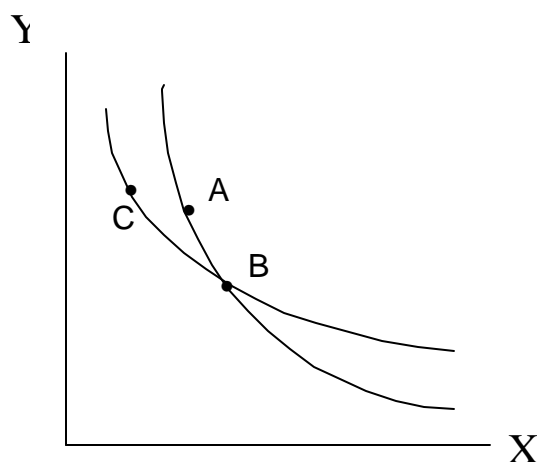
Bajo los tres supuestos se pueden mencionar las siguientes propiedades de las curvas de indiferencia:

(a) Por cada punto del plano pasa una curva de indiferencia, por lo tanto existe un mapa de curvas de indiferencia. Esta propiedad se deduce directamente del supuesto de completitud y de la definición de curva de indiferencia. Gráficamente



(b) Las curvas de indiferencia no pueden cruzarse

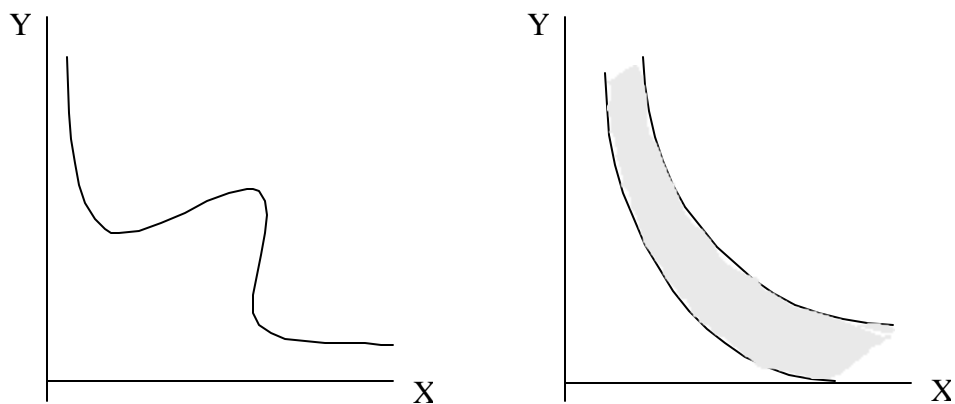
Si no fuera así, se estaría contradiciendo el supuesto de supuesto de transitividad. Veamos con un ejemplo, supongamos por el momento que las curvas si pueden cruzarse tal como se muestra en el siguiente gráfico. Sean A, B y C tres canastas, es fácil ver que  $A \sim B$  y  $B \sim C$ . Por lo tanto por transitividad debería ocurrir que  $A \sim C$ . Sin embargo  $A \not\sim C$  pues pertenecen a curvas distintas. Entonces no se cumple el supuesto 2.



(c) Son líneas de pendiente negativa.

Si las curvas de indiferencia tuvieran pendiente positiva, esto contradiría el supuesto 3 de no saturación, pues tendríamos canastas que tienen más de alguno de los bienes y lo mismo de los otros, y sin embargo estas canastas serían indiferentes.

Tampoco pueden existir "áreas" o "bandas" de indiferencia porque contradicen el mismo supuesto.

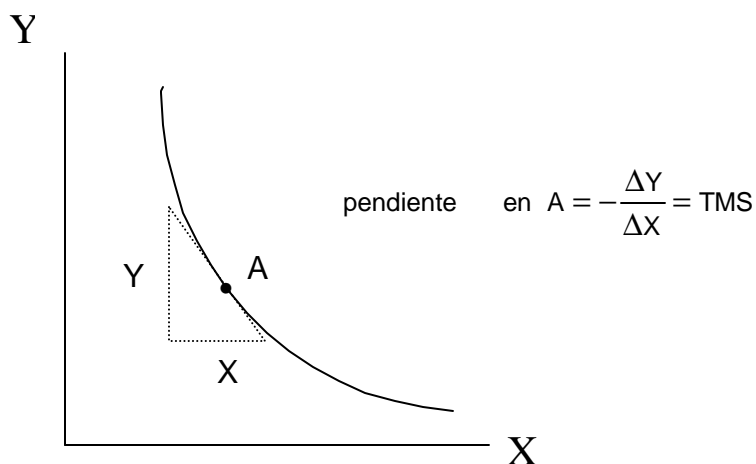


Dos ejemplos que violan el supuesto 3

#### II.4 La Tasa o Relación Marginal de Sustitución

La pendiente de la curva de indiferencia lleva el nombre de Tasa Marginal de Sustitución (TMS). Ésta indica cuánto está dispuesto a sacrificarse de un bien para obtener una pequeña cantidad del otro y mantener el mismo nivel de satisfacción.

Gráficamente

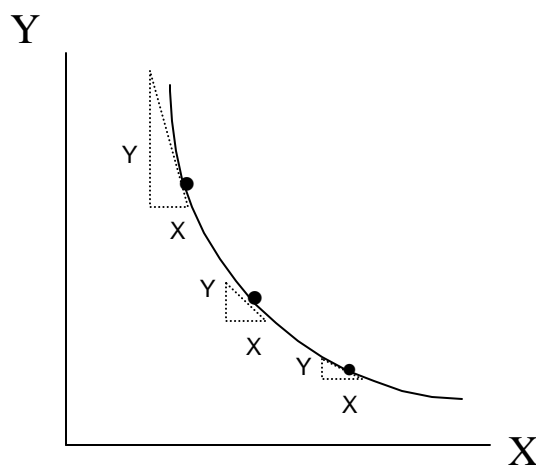


La TMS indica que podríamos dejar de consumir Y a cambio de X y el nivel de satisfacción se mantiene constante.

Por ejemplo, si  $\text{TMS} = -2$  esto indica que podemos dejar de consumir dos unidades del bien Y a cambio de una del bien X, y el nivel de satisfacción no se ve alterado. También  $\text{TMS} = -2$  indica que estamos dispuestos a sacrificar  $\frac{1}{2}$  unidad de X a cambio de una de Y, y el nivel de satisfacción se mantiene constante.

\*Nota.- La TMS tiene signo negativo, sin embargo es frecuente considerar a la TMS en valores absolutos.

Usualmente se asume que la TMS es decreciente, lo que en el gráfico significa que la pendiente se acerca a cero conforme nos desplazamos de izquierda a derecha a lo largo de la curva. Económicamente este supuesto significa que los consumidores están dispuestos a sacrificar cada vez menos unidades de un bien cuando se vuelve escaso.



Afirmar que la TMS es decreciente equivale a decir que las curvas de indiferencia son estrictamente convexas. Tenemos entonces un nuevo supuesto.

Supuesto 4: (Convexidad estricta) Las curvas de indiferencia son estrictamente convexas al origen, o lo que es lo mismo, la TMS es decreciente.

## II.5 Casos especiales de curvas de indiferencia

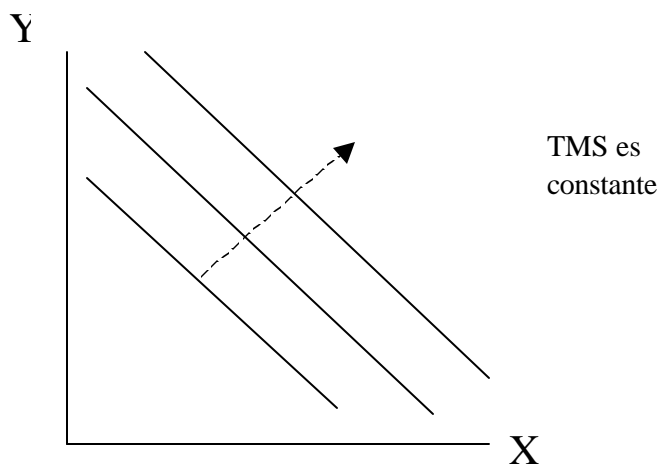
Ocurren cuando se levanta alguno de los supuestos, especialmente los supuestos 3 y 4.

(a) Bienes Sustitutivos Perfectos: Son aquellos que se pueden intercambiar en cantidades fijas sin alterar el nivel de satisfacción, independientemente de cuantas unidades posea de X o de Y. Para estos bienes la TMS es constante a lo largo de la curva de indiferencia.

En la realidad es difícil encontrar ejemplos puros de bienes sustitutivos perfectos. Lo más común es que la TMS no sea constante, y además es muy difícil que un consumidor no encuentre ninguna diferencia entre dos bienes que por si mismo son distintos.

Por ejemplo, si para un consumidor una tasa de café le da exactamente la misma satisfacción que una tasa de té, entonces siempre podría cambiar una tasa por otra independientemente si consume 100 tasas de café y una de té, 50 de café y 50 de té, o 1 de café y 100 de té. Entonces para este consumidor, té y café son sustitutivos perfectos.

Gráficamente, las curvas de indiferencia son líneas rectas.



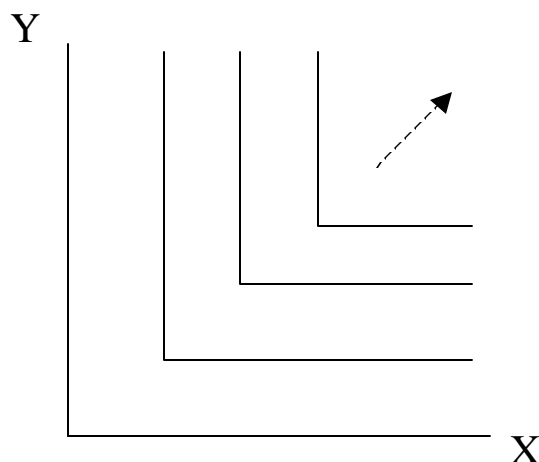
(b) Bienes Complementarios Perfectos: Son aquellos bienes que se consumen juntos en proporciones fijas. El consumo por separado de ellos no es de ninguna utilidad.

El ejemplo típico es el de los tornillos y las tuercas, los cuales deben utilizarse juntos. En este caso se levanta el supuesto 3, pues tener 1 tornillo y 1 tuerca es lo mismo que tener 2 tornillo y 1 tuercas.

(1,1) (2,1)

(1,1) (1,2); pero (2,2)  $\succ$  (1,1)

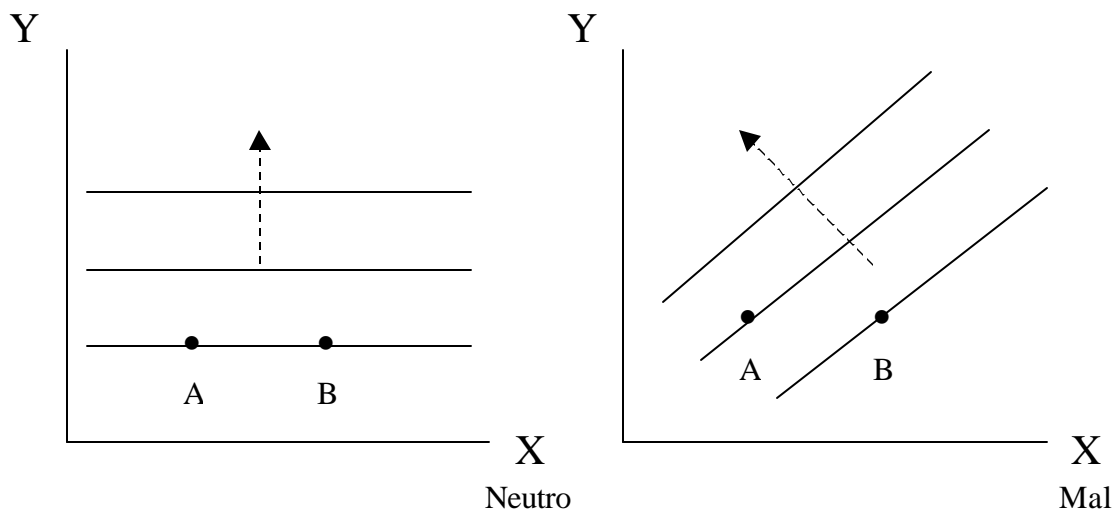
Gráficamente las curvas de indiferencia tienen forma de "L"



(c) Bienes neutros y males: El consumo de los bienes neutros no produce ni mayor ni menor satisfacción. El consumo de los males reduce la satisfacción del consumidor.

Estos bienes no cumplen el supuesto 3 de no saturación.

Gráficamente:

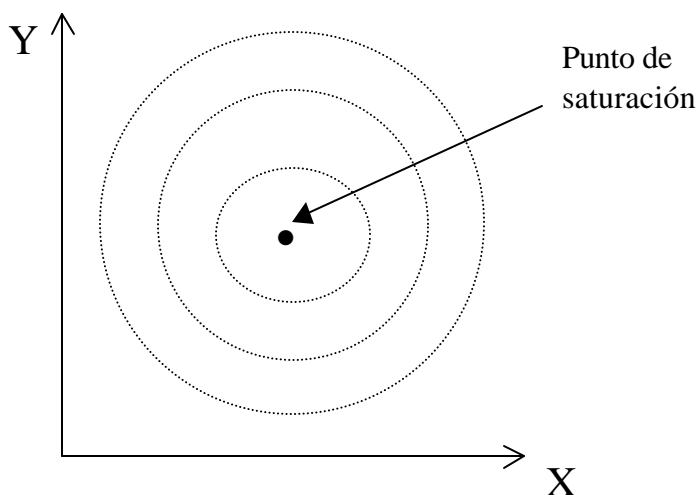


El dibujo de la izquierda corresponde a un bien neutro (bien X). En ese caso las curvas de indiferencia son planas y se cumple que  $A \sim B$ . Si el bien neutro fuera el bien Y, entonces las curvas de indiferencia serían verticales.

En el dibujo de la derecha el bien X es un mal. En este caso las curvas de indiferencia tienen pendiente positiva y se cumple que  $A \succ B$ , pese a que tiene menos unidades de X.

(d) Bienes Saturables: Existe algún punto de saturación o saciedad para el consumidor. El consumir más allá del punto de saturación reduce la satisfacción del consumidor.

Gráficamente



### II.6 La Utilidad

Todas las canastas del conjunto de elección producen cierto nivel de satisfacción a los consumidores. Las preferencias de los consumidores ( $\succ, \sim$ ) ordenan las canastas según dichos niveles de satisfacción.

Estas preferencias pueden representarse numéricamente según una *función de utilidad*.

Definición: Una *función de utilidad* es una función  $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la cual asigna un valor numérico a las canastas del conjunto de elección, de tal forma que se respete el orden establecido por las preferencias de la siguiente manera:

$$A \succ B \quad \text{si y sólo si} \quad U(A) > U(B)$$

$$A \sim B \quad \text{si y sólo si} \quad U(A) = U(B)$$

$$A \succeq B \quad \text{si y sólo si} \quad U(A) \geq U(B)$$

Los valores numéricos de la función de utilidad son totalmente arbitrarios. Lo más importante es que mantengan el orden de las preferencias.

Por ejemplo, si tenemos cuatro canastas A, B, C, D; donde se cumple que  $A \succ B \succ C$ , y  $C \sim D$ , podemos tener las siguientes funciones de utilidad que representen dichas preferencias:

Tabla 1. Representación de las preferencias a través de funciones de utilidad

Canastas	Funciones de Utilidad				
	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$f(U_1)$	$g(U_1)$
A	3	17	-1	6	-6
B	2	10	-2	4	-4
C	1	0.02	-3	2	-2
D	1	0.02	-3	2	-2

Tanto  $U_1$ ,  $U_2$  como  $U_3$  representan correctamente a las preferencias de este consumidor. Nótese que los valores de la función de utilidad podrían ser negativos.

Evidentemente existen infinitas funciones de utilidad capaces de representar las mismas preferencias. Además, transformaciones monótonas crecientes<sup>1</sup> de una función de utilidad también son funciones de utilidad. Es decir, si  $U(X,Y)$  es una función de utilidad y  $f(\cdot)$  es una transformación monótona creciente, entonces la función compuesta  $f(U(x,y))$  es una función de utilidad. Algunos ejemplos típicos de funciones monótonas crecientes son las funciones  $f(x) = \ln x$ ,  $f(x) = \exp(x)$ ,  $f(x) = ax + b$ , con  $a > 0$ ; etc. La función  $f(x) = x^2$  también es una transformación monótona creciente si los valores de  $x$  son positivos.

En la tabla 1, considérese una función monótona creciente  $f(x) = 2x$ . Transformando a la función  $U_1$  tenemos como resultado una nueva función de utilidad  $f(U_1(\cdot))$ , la cual representa a las preferencias. No ocurre lo mismo con la función decreciente  $g(x) = -2x$ , la cual invierte el orden de las preferencias. Por lo tanto  $g(U_1(\cdot))$  no es una función de utilidad que represente a las preferencias.

Ejemplo: Sea  $U(X,Y) = XY$  la función de utilidad para las canastas de dos bienes, ordene las siguientes canastas: (1,2), (2,1), (3,1) y (3,0).

Comparando las utilidades de estas canastas, el ordenamiento es el siguiente:

$$(3,1) \succ (2,1) \quad (1,2) \succ (3,0)$$

La Utilidad y la Tasa Marginal de Sustitución están relacionadas a través de la Utilidad Marginal, la cual se define de la siguiente forma:

**Definición:** Dada una función de utilidad  $U(X,Y)$ , se define la *Utilidad Marginal de X* como la el incremento en la utilidad que genera el consumo de una unidad adicional de  $X$ , manteniendo el consumo de  $Y$  constante.

$$\text{Utilidad Marginal de } X = \text{UMgX} = \frac{\partial U}{\partial X}$$

Nota.- En forma análoga también existe una  $\text{UMgY}$ .

La magnitud de la  $\text{UMgX}$  también es arbitraria pues depende de cómo se haya definido a la función original  $U(X,Y)$ .

La relación existente entre  $\text{UMgX}$  se deduce de la siguiente forma. Diferenciando totalmente la función  $U(X,Y)$  tenemos

$$dU = \frac{\partial U}{\partial X} \cdot dX + \frac{\partial U}{\partial Y} \cdot dY = \text{UMgX} \cdot dX + \text{UMgY} \cdot dY = 0$$

despejando obtenemos la siguiente relación

$$| \text{TMS} | = -\frac{dY}{dX} = \frac{\text{UMgX}}{\text{UMgY}}$$

Es también bastante común asumir que la  $\text{UMg}$  de los bienes es decreciente, es decir los incrementos de utilidad que reportan los bienes son cada vez menores, aunque no siempre se asume este supuesto.

<sup>1</sup> Formalmente una función  $y = f(x)$  es monótona creciente si para cualquier par de elementos  $x_1, x_2$  del dominio, si  $x_1 > x_2$  entonces  $f(x_1) > f(x_2)$ .

## II.7 La restricción presupuestaria.

En la realidad los consumidores no pueden consumir todos los bienes del conjunto de elección puesto que están limitados por su ingreso.

Dado el ingreso  $I$  de los consumidores y los precios  $P_x$  y  $P_y$ , el conjunto de canastas que pueden ser efectivamente adquiridos por los consumidores es el *conjunto factible*.

Definición: El *conjunto presupuestario* o *conjunto factible* es el conjunto de canastas que están al alcance del consumidor, dados su ingreso y los precios de los bienes.

En notación de conjuntos:

$$\text{Conjunto presupuestario} = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 / P_x X + P_y Y \leq I\}$$

donde  $I$  es el ingreso del consumidor,  $P_x$  y  $P_y$  son los precios de los bienes  $X$  e  $Y$  respectivamente.

Gráficamente



El consumidor está restringido a elegir canastas del conjunto presupuestario. Aquellas canastas fuera del conjunto son canastas inalcanzables para el consumidor, porque no puede adquirirlas.

Dentro del conjunto presupuestario es importante destacar a aquellas canastas donde el consumidor gasta todo su ingreso. Estas canastas están ubicadas en la frontera del conjunto, el cual tiene el nombre de recta de presupuesto.

$$\text{Recta de presupuesto} = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 / P_x X + P_y Y = I\}$$

Para todas aquellas canastas al interior del conjunto, el consumidor no gasta todo su ingreso (le sobra dinero).

La ecuación de la recta de presupuesto es  $P_x X + P_y Y = I$ . Despejando  $Y$  en términos de  $X$  tenemos

$$Y = \frac{I}{P_y} - \frac{P_x}{P_y} \cdot X$$

Donde la pendiente es  $-P_x/P_y$ , y los interceptos con los ejes  $X$  e  $Y$  son  $\frac{I}{P_x}$  e  $\frac{I}{P_y}$  respectivamente.

Al término  $P_x/P_y$  se le llama precio relativo, y muestra cuanto cuesta el bien X en términos del bien Y. Por ejemplo, si  $P_x/P_y = 2$ , esto significa que el bien X es dos veces más caro que el bien Y, y por lo tanto en el mercado se intercambia una unidad de X por dos de Y (en una economía de trueque se cambiaría un X por dos Y).

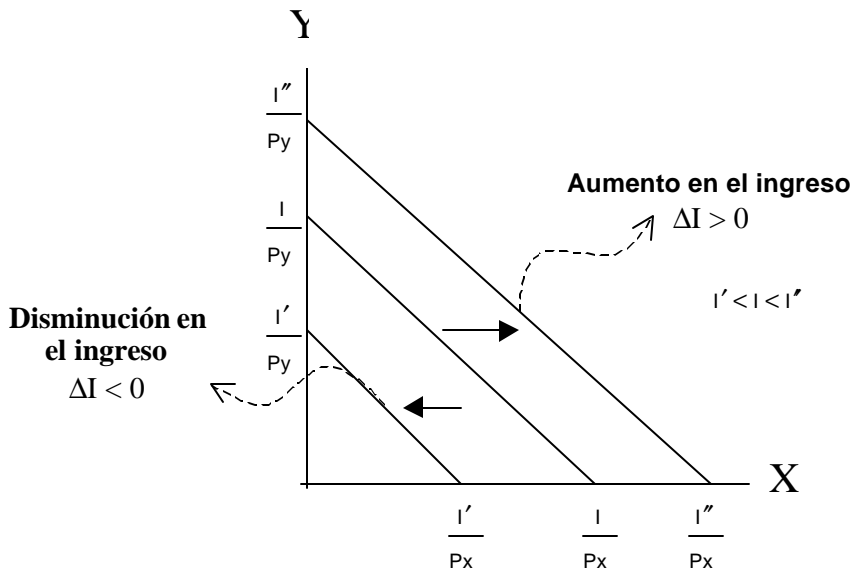
La recta de presupuesto se altera ante variaciones en los precios de los bienes y ante cambios en el ingreso. Veamos cada caso.

(a) Cambios en el ingreso

Un incremento en el ingreso desplaza la recta de presupuesto en forma paralela hacia la derecha, con lo cual el conjunto presupuestario se expande. Esto equivale a decir que el poder adquisitivo o ingreso real de los consumidores ha aumentado, debido a que ahora ellos pueden adquirir canastas que antes estaban fuera de su alcance.

Por el contrario, si el ingreso nominal se reduce, la recta se desplaza paralelamente a la izquierda, haciéndose más pequeño el conjunto presupuestario, y cayendo el poder adquisitivo y el ingreso real.

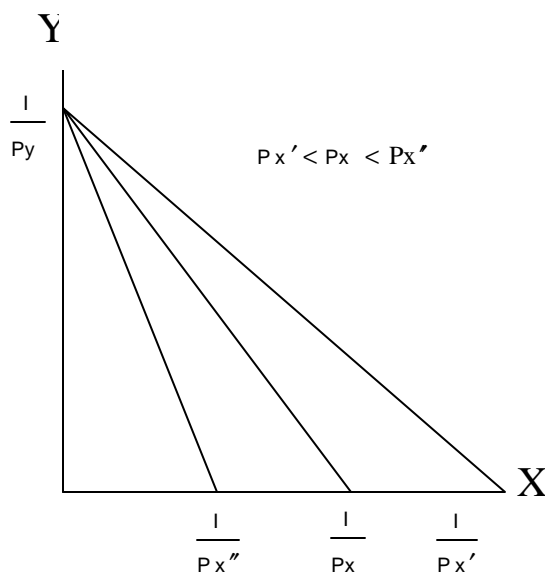
Gráficamente:



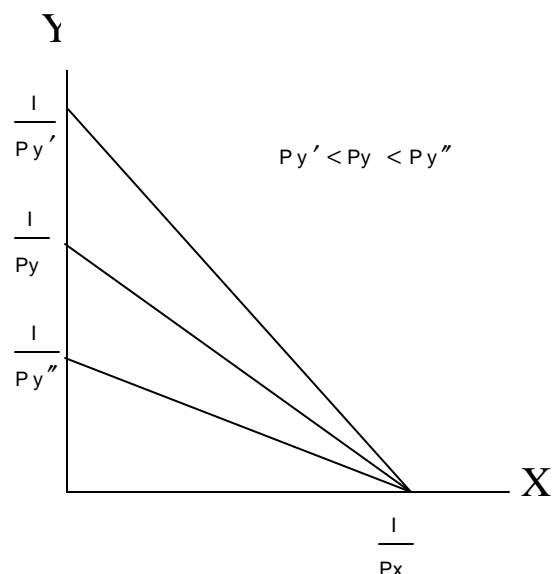
(b) Cambios en los precios

Estos cambios alteran la pendiente de la recta de presupuesto y a los interceptos. Por ejemplo, supongamos que  $P_x$  aumenta (manteniendo todo lo demás constante), lo que tenemos es que la recta gira hacia adentro sobre el intercepto del eje Y, resultando con una pendiente mayor (en valor absoluto).

Gráficamente:



### Variaciones en el precio de X



### Variaciones en el precio de Y

Si los dos precios cambian al mismo tiempo, el efecto sobre la pendiente y los interceptos es incierto.

Por ejemplo, si los dos precios suben en la misma proporción, la recta se desplaza en forma paralela hacia dentro como si se hubiera reducido el ingreso nominal. Matemáticamente esto se puede explicar con la ecuación de la recta de presupuesto. Supongamos que multiplicamos a los precios por el factor  $k > 1$ , entonces

$$(k \cdot P_x) \cdot X + (k \cdot P_y) \cdot Y = I$$

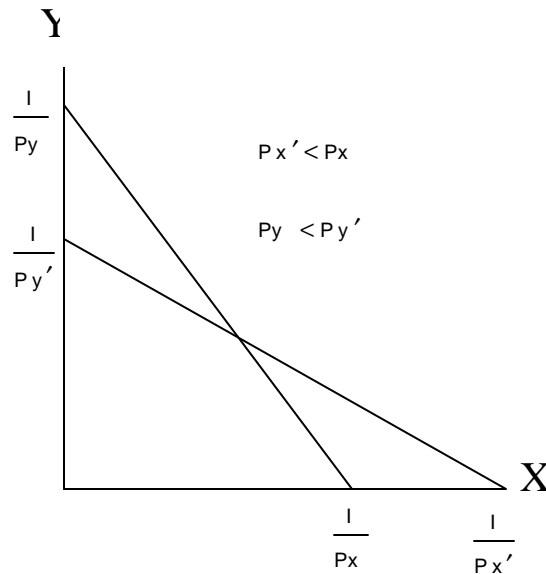
$$k(P_x \cdot X + P_y \cdot Y) = I$$

$$P_x \cdot X + P_y \cdot Y = \frac{I}{k}$$

Multiplicar a todos los precios por  $k > 1$  equivale a multiplicar el ingreso por  $\frac{1}{k} < 1$ , y por lo tanto el conjunto presupuestario se hace más pequeño y el consumidor pierde ingreso real.

Si los dos precios se incrementan en proporciones distintas, con toda seguridad podemos afirmar que el consumidor pierde poder adquisitivo pero si no sabemos qué precio aumentó más no podemos afirmar si el precio relativo ha aumentado o ha disminuido.

Si uno de los precios baja y el otro sube (por ejemplo,  $P_x$  baja y  $P_y$  sube), la pendiente cambia con toda seguridad (en el ejemplo se vuelve más plana). Sin embargo, el efecto sobre el ingreso real o poder adquisitivo no queda claro. No podemos afirmar si ha aumentado o ha disminuido.

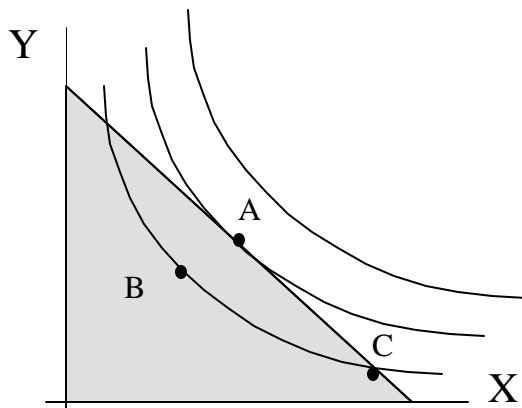


**Variaciones en los dos precios**

II.8 La elección óptima de los consumidores

Dadas las preferencias por las canastas de bienes y dado el conjunto de canastas al alcance de los consumidores, y asumiendo que el consumidor busca maximizar su satisfacción, la teoría del consumidor afirma que los consumidores escogerán aquella canasta que les brinde la mayor utilidad o satisfacción dentro del conjunto de canastas factibles.

Gráficamente, si se satisfacen los supuestos 1,2,3 y 4 la canasta escogida será aquella donde la curva de indiferencia es tangente a la recta de presupuesto



La Canasta A es la canasta escogida del conjunto de elección. Canastas como B o C no pueden ser óptimas pues A es preferida a ellas.

En el punto A se cumple que  $\frac{P_x}{P_y} = \frac{UMgX}{UMgY} = |TMS|$

Es decir, en el óptimo la valoración objetiva del bien X en términos de Y (el término  $\frac{P_x}{P_y}$ ) se iguala a la valoración subjetiva del bien X en términos de Y (es decir la tasa marginal de sustitución).

Nótese que si se cumplen el supuesto 3, el consumidor gastará todo su ingreso. También, si se cumple el supuesto 4, sólo hay una canasta óptima.

Ejercicio: Levante el supuesto 3 y verifique que el consumidor *podría* no gastar todo su ingreso (elegiría una canasta al interior del conjunto presupuestario).

Ejercicio: Levante el supuesto 4 y compruebe que *podría* existir más de una solución al problema.

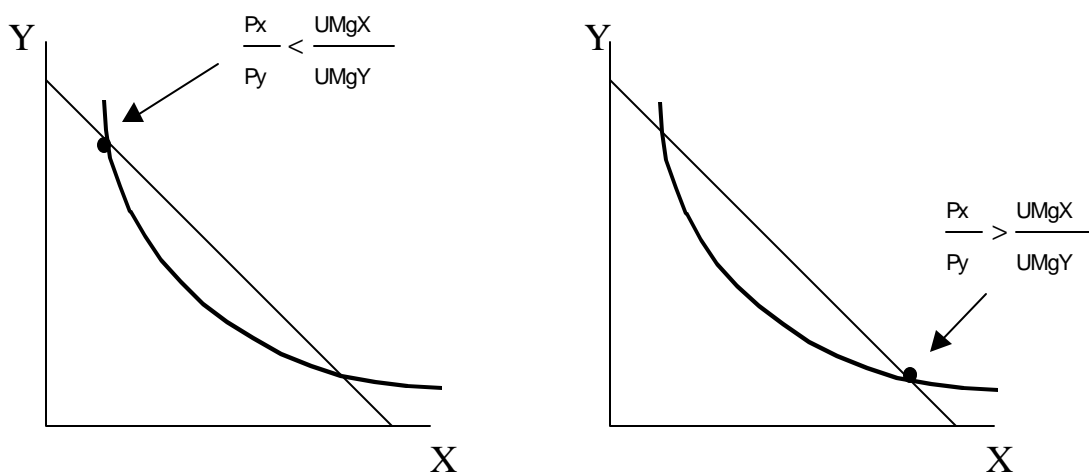
Asumiendo que las preferencias del consumidor cumplen los supuestos 1, 2, 3 y 4, el principio de optimización aplicable en este caso es que el consumidor adquirirá cantidades de X y Y hasta el punto en que se iguala la valoración subjetiva de los bienes con la valoración objetiva o de mercado, y además gasta todo su ingreso.

Para comprobar que el consumidor optimiza cuando los dos términos son iguales, veamos que ocurriría si son distintos. Por ejemplo, que ocurriría si

$$\frac{P_x}{P_y} < \frac{UMgX}{UMgY}$$

En este caso, la valoración subjetiva del bien X es mayor a la valoración del mercado de dicho bien (en términos de Y)<sup>2</sup>. Por ello, el consumidor encontrará que valora el bien X más de lo que cuesta, y decidirá adquirir más unidades del bien X y menos de Y. Esto hará que la TMS baje hasta el punto en que se iguale con la relación de precios.

En el gráfico de la izquierda, el consumidor puede mejorar su satisfacción consumiendo más de X y menos de Y. Se moverá a lo largo de la recta de presupuesto hacia abajo y a la derecha.



<sup>2</sup> Lo que es lo mismo a afirmar que la valoración del mercado del bien Y en términos de X es mayor a la valoración subjetiva de dicho bien en términos de X.

Si ocurriese lo contrario, es decir

$$\frac{P_x}{P_y} > \frac{UMgX}{UMgY}$$

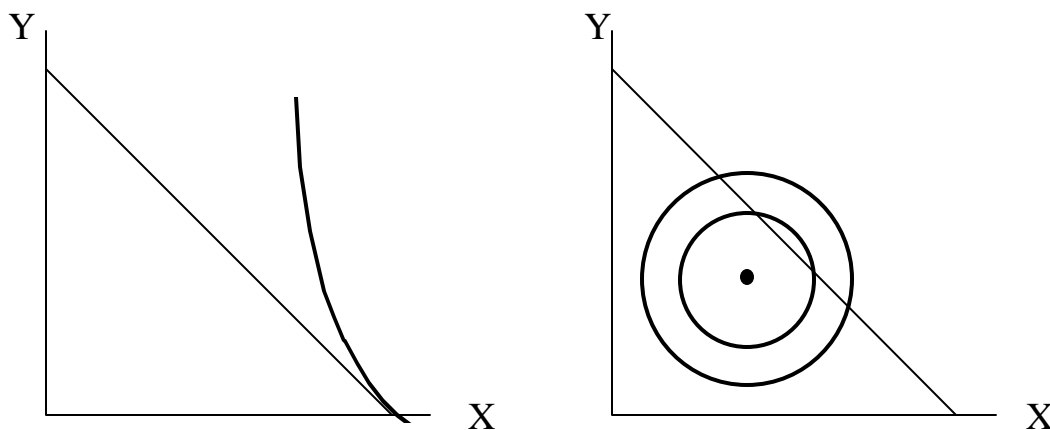
entonces el consumidor encontraría que valora al bien X menos de lo que le cuesta en el mercado en términos de Y (lo inverso ocurre con Y). Entonces decidirá consumir más de Y y menos de X, desplazándose hacia arriba y a la izquierda a lo largo de la recta de presupuesto. Con esto la TMS aumentará, hasta el punto que se iguale con la relación de precios. Esto termina la comprobación de que en el óptimo del consumidor, la TMS de Y por X se iguala al precio relativo del bien X en términos de Y.

Cuando las preferencias satisfacen los cuatro supuestos, en general la condición de tangencia

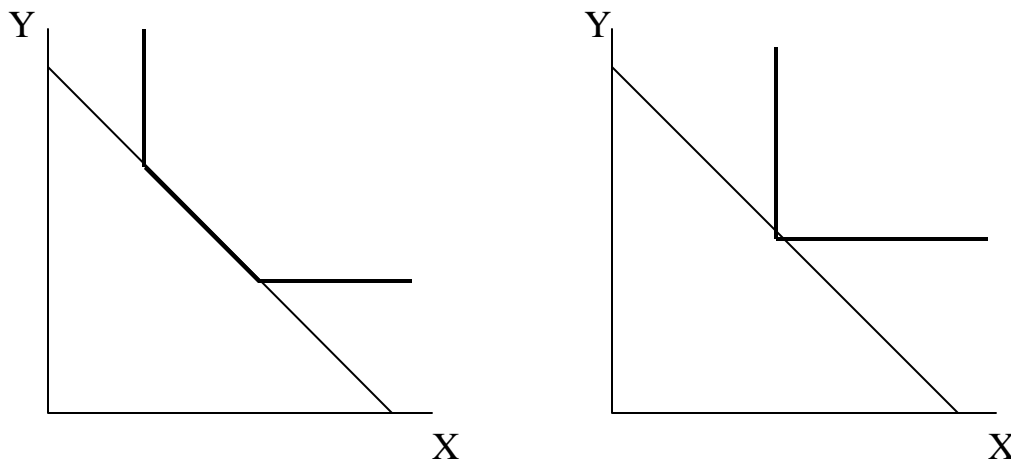
$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{UMgX}{UMgY}$$

se cumple y además solamente existe una canasta óptima para el consumidor. Sin

embargo, la tangencia podría no cumplirse si se tiene una solución de esquina como en el gráfico de la izquierda. En el de la derecha se levanta el supuesto de la no-saturación. Aquí el consumidor maximiza en el punto de saturación (tampoco se cumple la tangencia).



También si se cumple cuando levantamos el supuesto 4, la tangencia ya no se cumple, o existen infinitas soluciones. En el gráfico de la izquierda se cumple la tangencia pero hay infinitas soluciones. En el de la derecha hay una solución pero la curva de indiferencia no es tangente a la recta de presupuesto (no hay pendiente en el vértice).



## II.9 Solución Matemática del Problema del Consumidor

El problema del consumidor es encontrar aquella canasta del conjunto de presupuestario que maximiza su utilidad.

Esto es

$$\begin{aligned} \max \quad & U(X, Y) \\ & X, Y \\ \text{s.a.} \quad & P_x \cdot X + P_y \cdot Y \leq I \end{aligned}$$

Matemáticamente este problema de optimización con restricciones se resuelve utilizando el método de multiplicadores de Lagrange. Se plantea el "lagrangiano"

$$L(X, Y, \lambda) = U(X, Y) + \lambda(I - P_x \cdot X - P_y \cdot Y)$$

La restricción presupuestaria generalmente se cumple con igualdad salvo que se viole el supuesto de no-saturación. Como es muy raro analizar este caso, resolveremos como si la restricción se cumpliera con igualdad<sup>3</sup>. En este caso, las condiciones necesarias de primer orden son las siguientes

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial X} - \lambda P_x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = \frac{\partial U}{\partial Y} - \lambda P_y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - P_x \cdot X - P_y \cdot Y = 0 \quad (3)$$

De (1) y (2) se obtiene la siguiente ecuación

$$\lambda = \frac{UMgX}{P_x} = \frac{UMgY}{P_y} \quad (4)$$

De las ecuaciones (3) y (4) se obtiene la canasta óptima del consumidor ( $x^*, y^*$ ).

La interpretación de la ecuación (4) es interesante. La utilidad marginal de un bien dividida por su precio es *la utilidad marginal de la última unidad monetaria gastada en ese bien*. Por ejemplo, si  $UMgX = 4$  y  $P_x = 2$ , cada unidad monetaria destinada a comprar X brindó dos unidades de utilidad. La condición (4) establece que dichas utilidades marginales deben igualarse en el óptimo, lo que quiere decir que el "último sol" gastado ya sea en X o en Y rinde lo mismo en términos de utilidad. Si (4) no se cumpliera con igualdad, por ejemplo  $\frac{UMgX}{P_x} > \frac{UMgY}{P_y}$  entonces al consumidor le convendría

destinar más unidades monetarias a X y menos a Y. En cambio si  $\frac{UMgX}{P_x} < \frac{UMgY}{P_y}$  convendría gastar más en Y y menos en X. Finalmente el término  $\lambda$  es la Utilidad Marginal de una unidad monetaria más, ya sea que se gaste en X o Y. Por ello lleva el nombre de *Utilidad Marginal del Ingreso*.

Las condiciones de segundo orden del problema del consumidor con dos bienes es como sigue. Dada la matriz Hessiana Orlada

<sup>3</sup> El caso de restricciones de desigualdad requiere analizar las condiciones de Kuhn-Tucker. Además se debe considerar las restricciones de no negatividad  $X \geq 0$ ,  $Y \geq 0$ .

$$\tilde{H}(X, Y) = \begin{bmatrix} 0 & P_x & P_y \\ P_x & U_{XX} & U_{XY} \\ P_y & U_{YX} & U_{YY} \end{bmatrix}$$

el determinante de esta matriz evaluado en  $(x^*, y^*)$  debe ser mayor que cero.

Nota.- Si las curvas de indiferencia son estrictamente convexas al origen, la condición de segundo orden se cumple siempre.

\*\*\*\*\*

EJERCICIO: Suponga un consumidor con función de utilidad  $U(X, Y) = X^{1/2} Y^{1/2}$ , con ingreso  $I = 10$  que enfrenta los precios  $P_x = 2$ ,  $P_y = 1$ . (a) ¿Qué supuestos de las preferencias cumple este consumidor? (b) Encuentre la canasta óptima para este consumidor.

En la parte (a) debemos verificar si se cumplen los supuestos de las preferencias.

- Completitud

Dadas dos canastas (a,b) y (c,d) que pertenecen al conjunto de elección, la utilidad de ellas es  $a^{1/2} b^{1/2}$  y  $c^{1/2} d^{1/2}$  respectivamente. Para saber si la primera canasta es  $\succ$ ,  $\sim$  ó  $\prec$  que la segunda, bastará comparar los valores de la utilidad, lo que puede hacerse para cualquier a, b, c ó d. Entonces se cumple el supuesto.

- Transitividad

Sean tres canastas (a,b), (c,d) y (e,f) del conjunto de elección, la transitividad afirma que si (a,b)  $\succ$  (c,d) y (c,d)  $\succ$  (e,f) entonces (a,b)  $\succ$  (e,f). para verificar esta afirmación, utilicemos la utilidad de estas canastas y comparemos. Es evidente que si partimos del hecho que

$$\begin{aligned} (a,b) \succ (c,d) & \text{ si y sólo si } a^{1/2} b^{1/2} > c^{1/2} d^{1/2} \\ (c,d) \succ (e,f) & \text{ si y sólo si } c^{1/2} d^{1/2} > e^{1/2} f^{1/2} \end{aligned}$$

Como  $a^{1/2} b^{1/2} > e^{1/2} f^{1/2}$  (recuerde que son números reales) entonces también es verdad que (a,b)  $\succ$  (e,f). Por lo tanto se cumple la transitividad para cualquier (a,b), (c,d) y (e,f).

- No saturación

Si aumentos en X o en Y incrementan la utilidad siempre, entonces se cumple el supuesto. Bastará con observar las utilidades marginales. Como  $UMgX = \frac{1}{2}(Y/X)^{1/2} > 0$ , entonces la utilidad siempre crecerá y por lo tanto no existe ningún punto de saturación. Lo mismo para Y.

- Convexidad estricta o TMS decreciente

Es fácil encontrar que la TMS es  $Y/X$  en este ejemplo, la cual decrece conforme se incrementa X al mismo tiempo que se reduce Y. Entonces el supuesto se cumple.

(b) Planteamos el problema del consumidor

$$\begin{aligned} \max \quad & X^{\frac{1}{2}} Y^{\frac{1}{2}} \\ & X, Y \\ \text{s.a.} \quad & 2X + Y = 10 \end{aligned}$$

En este caso podemos aplicar una transformación monótona creciente a la función de utilidad con el fin de simplificarla. Aplicamos la transformación  $\ln(x)$ . Entonces la función objetivo del problema se convierte en

$$\ln(U(X,Y)) = \frac{1}{2} \ln X + \frac{1}{2} \ln Y$$

la cual también es una función de utilidad para las mismas preferencias.

El lagrangeano es

$$L(X, Y, \lambda) = \frac{1}{2} \ln X + \frac{1}{2} \ln Y + \lambda(10 - 2X - Y)$$

Las condiciones necesarias de primer orden son

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \frac{1}{2X} - 2\lambda = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = \frac{1}{2Y} - \lambda = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 - 2X - Y = 0 \quad (3)$$

De (1) y (2), despejando  $\lambda$  e igualando ambas ecuaciones se obtiene  $Y = 2X$ . Reemplazando este resultado en (3) y resolviendo para  $X$  y  $Y$  tenemos la canasta óptima

$$(x^* = 2.5, y^* = 5)$$

Es decir, la elección óptima del consumidor es consumir 2.5 unidades de  $X$  y 5 unidades de  $Y$  por unidad de tiempo.

\*\*\*\*\*

## II.10 Las funciones de demanda y la utilidad indirecta

En el ejemplo anterior encontramos la canasta óptima del consumidor para los precios  $P_x$  y  $P_y$ , y el ingreso  $I$ . Si estos precios o ingreso cambiaran, obtendríamos otra solución al problema (otra canasta óptima).

Es decir, podemos encontrar una relación entre  $P_x$ ,  $P_y$  e  $I$  con las cantidades demandadas de  $X$  e  $Y$ . Esta relación es la función de demanda.

Definición: Una "función de demanda"  $X(P_x, P_y, I)$  es una relación matemática entre los precios de los bienes y el ingreso, con la cantidad demandada del bien  $X$ .

La definición para  $Y$  es análoga:  $Y(P_x, P_y, I)$  es la demanda por  $Y$ .

En el caso de 2 bienes la función de demanda es una función  $X: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . En el caso de  $n$  bienes, las funciones de demanda son funciones de  $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$

Los gustos y preferencias de los consumidores determinan la forma funcional de la  $X(P_x, P_y, I)$ .

$X(P_x, P_y, I)$  y  $Y(P_x, P_y, I)$  se obtienen de resolver el problema general

$$\begin{aligned} \max \quad & U(X, Y) \\ & X, Y \\ \text{s.a.} \quad & P_x \cdot X + P_y \cdot Y \leq I \end{aligned}$$

Las funciones de demanda son *homogéneas de grado 0 en precios e ingreso*. Esto quiere decir que si los precios y el ingreso se multiplican por una constante positiva  $k$ , la canasta óptima no debe alterarse. En símbolos

$$X(P_x, P_y, I) = X(kP_x, kP_y, kI) \quad \forall k > 0$$

\*\*\*\*\*

EJERCICIO: Encuentre las funciones de demanda del consumidor que resuelve el siguiente problema

$$\begin{aligned} \max \quad & U(X, Y) = \alpha \ln X + (1 - \alpha) \ln Y \\ & X, Y \\ \text{s.a.} \quad & P_x \cdot X + P_y \cdot Y = I \end{aligned}$$

Planteamos el lagrangeano

$$L(X, Y, \lambda) = \alpha \ln X + (1 - \alpha) \ln Y + \lambda(I - P_x \cdot X - P_y \cdot Y)$$

Las condiciones de primer orden son

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \frac{\alpha}{X} - \lambda P_x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = \frac{1 - \alpha}{Y} - \lambda P_y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - P_x \cdot X - P_y \cdot Y = 0 \quad (3)$$

De (1) y (2) se obtiene

$$Y = \left( \frac{P_x}{P_y} \right) \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) \cdot X \quad (4)$$

Reemplazando (4) en (3) tenemos

$$P_x \cdot X + P_y \cdot \left( \frac{P_x}{P_y} \right) \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) \cdot X = I$$

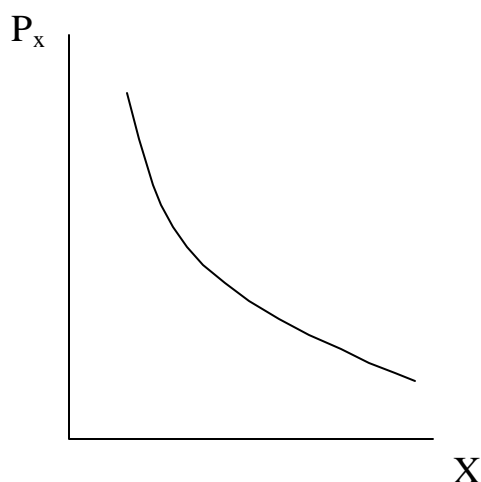
$$P_x \cdot X \cdot \left(1 + \frac{1 - \alpha}{\alpha}\right) = I$$

$$X = \frac{\alpha \cdot I}{P_x} \equiv X(P_x, P_y, I)$$

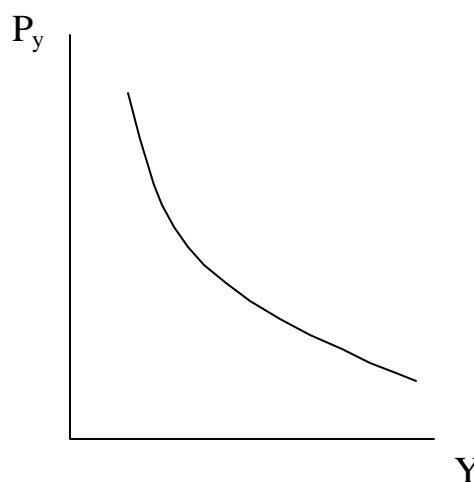
la cual es la función de demanda de X. Reemplazando este resultado en (4) tenemos la función de demanda de Y.

$$Y = \frac{(1 - \alpha) \cdot I}{P_y} \equiv Y(P_x, P_y, I)$$

A partir de las funciones de demanda podemos graficar las *curvas de demanda*, las cuales muestran la relación existente entre los precios de los bienes y las cantidades demandadas de ellos, manteniendo todo lo demás constante. En el ejemplo tienen la siguiente forma.



**Curva de Demanda por X**



**Curva de Demanda por Y**

\*\*\*\*\*

Algunas veces estamos interesados en conocer cuál es el nivel de utilidad alcanzado. Como bien sabemos, esa la función de utilidad es arbitraria, sin embargo conocer el valor de la función de utilidad puede ser útil si deseamos, por ejemplo, evaluar políticas que afecten la utilidad (y el bienestar de los consumidores).

Sabemos que las variables  $P_x$ ,  $P_y$  e  $I$  afectan directamente a las cantidades consumidas  $x^*$  e  $y^*$ . A su vez  $x^*$  e  $y^*$  afecta a la utilidad  $U(X,Y)$ . Por la tanto se puede afirmar que  $P_x$ ,  $P_y$  e  $I$  afectan indirectamente a la utilidad.

Definición: Sean las funciones de demanda  $X(P_x, P_y, I)$ ,  $Y(P_x, P_y, I)$  deducidas de una función de utilidad  $U(X,Y)$ , entonces la "*Función de Utilidad Indirecta*" es la función compuesta

$$V(P_x, P_y, I) \equiv U(X(P_x, P_y, I), Y(P_x, P_y, I))$$

la cual relaciona los precios y el ingreso con la máxima utilidad alcanzable a esos precios e ingreso.

EJEMPLO: Para la función de utilidad  $U(X, Y) = X^\alpha \cdot Y^{(1-\alpha)}$  y las demandas  $X(P_x, P_y, I) = \frac{\alpha \cdot I}{P_x}$  y  $Y(P_x, P_y, I) = \frac{(1-\alpha) \cdot I}{P_y}$ , la utilidad indirecta es

$$V(P_x, P_y, I) = \left( \frac{\alpha \cdot I}{P_x} \right)^\alpha \cdot \left( \frac{(1-\alpha) \cdot I}{P_y} \right)^{(1-\alpha)}$$

Cuando  $P_x=2$ ,  $P_y=1$ ,  $I=10$  y  $\alpha=1/2$  la utilidad es  $V^*=3.53$ .