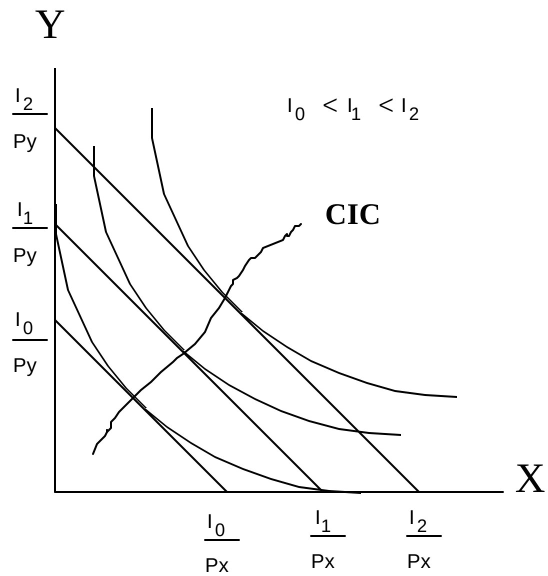
II.11 Efecto de cambios en el ingreso y los precios

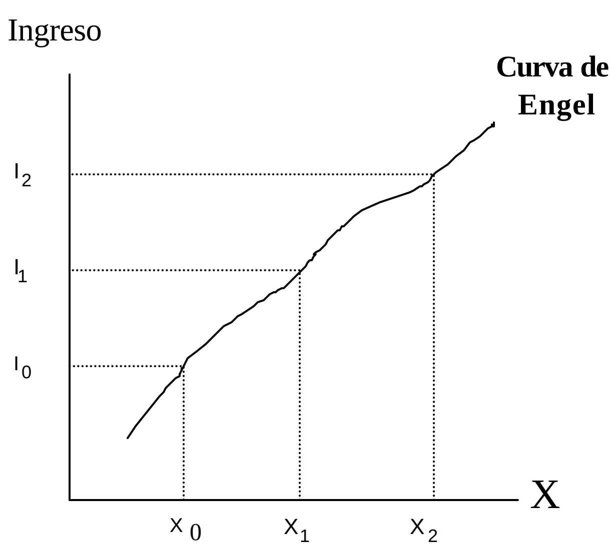
II.11.1 *Cambios en el ingreso*.- Supongamos que el ingreso del consumidor se eleva de I a I'. Gráficamente esto se refleja en un traslado paralelo de la recta de presupuesto hacia la derecha, lo que significa que el conjunto factible se ha ampliado y por lo tanto el consumidor está en capacidad de adquirir canastas que antes estaban fuera de su alcance.



Si el ingreso aumenta, el consumidor maximiza su utilidad adquiriendo nuevas canastas. Uniendo todos los puntos de optimización para distintos niveles de ingreso tenemos la **Curva Ingreso Consumo** (CIC)

Es interesante observar la relación entre el ingreso y las cantidades consumidas de los bienes. Por ejemplo, en el gráfico anterior hay una relación positiva entre el ingreso y las cantidades consumidas de X (mientras mayor sea el ingreso, el consumo de dicho bien será mayor).

El siguiente gráfico muestra la relación entre el ingreso y las cantidades consumidas de los bienes. A esta curva se le llama Curva de Engel.

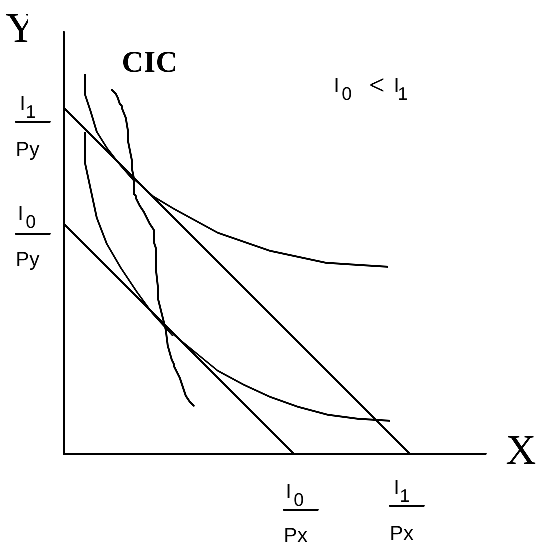


La **Curva de Engel** muestra la relación existente entre el ingreso y las cantidades consumidas de un bien. Esta curva se deduce directamente de la curva ingreso consumo.

Cuando la relación entre el consumo del bien y el ingreso es positiva, se dice que dicho bien es un *bien normal* para ese consumidor. En este caso, la curva de Engel tiene pendiente positiva. En el gráfico anterior, el bien X es un bien normal para el consumidor.

EJEMPLOS: - Comida en restaurante.
- Helados

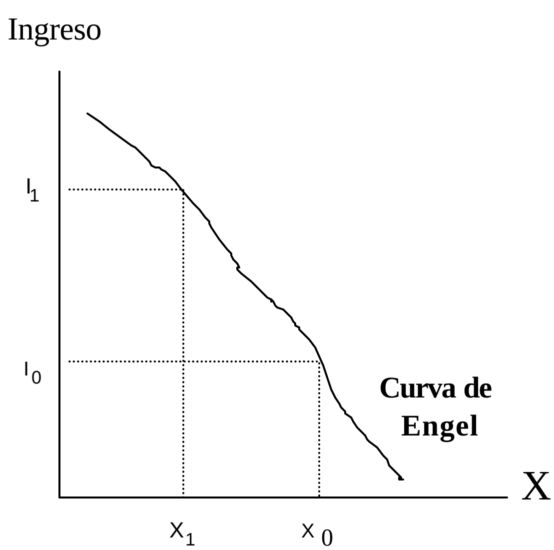
En algunos casos el incremento del ingreso puede reducir el consumo de alguno de los bienes, por lo que la relación descrita es negativa. A estos bienes se les conoce como *bienes inferiores*, tal como se observa en el siguiente gráfico.



El incremento en el ingreso reduce el consumo del bien X, por lo tanto X es un bien Inferior.

Nótese que Y es un bien normal en este ejemplo.

La curva de Engel para los bienes inferiores es una curva de pendiente negativa.

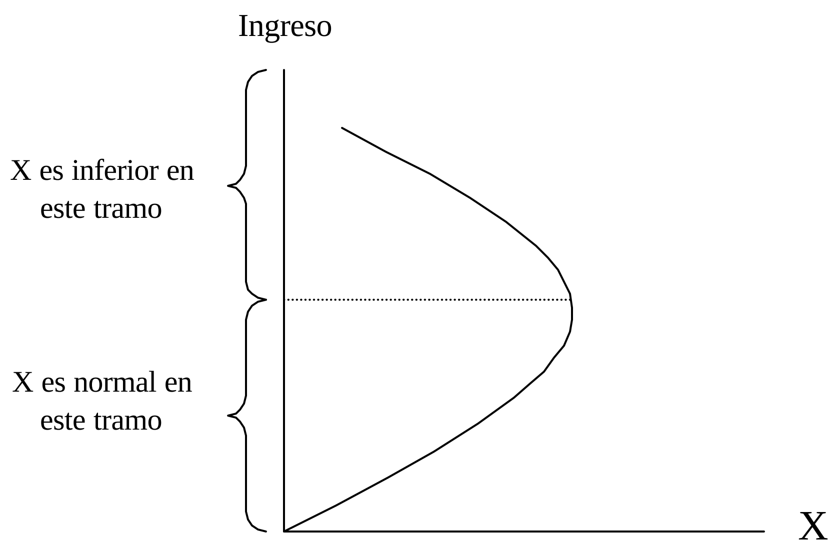


La **Curva de Engel** para un bien inferior tiene pendiente negativa. Mientras mayor sea el ingreso, menor será el consumo de dicho bien.

Debemos resaltar que los bienes en si mismos no son ni normales ni inferiores, sino que depende del comportamiento de cada consumidor. Un bien que es normal para un consumidor podría ser inferior para otro, dependiendo de las preferencias y de los niveles de ingreso.

EJEMPLO: La ropa de baja calidad puede ser considerada un bien inferior para algunas personas. Al incrementarse el ingreso se reduce el consumo de dicho bien.

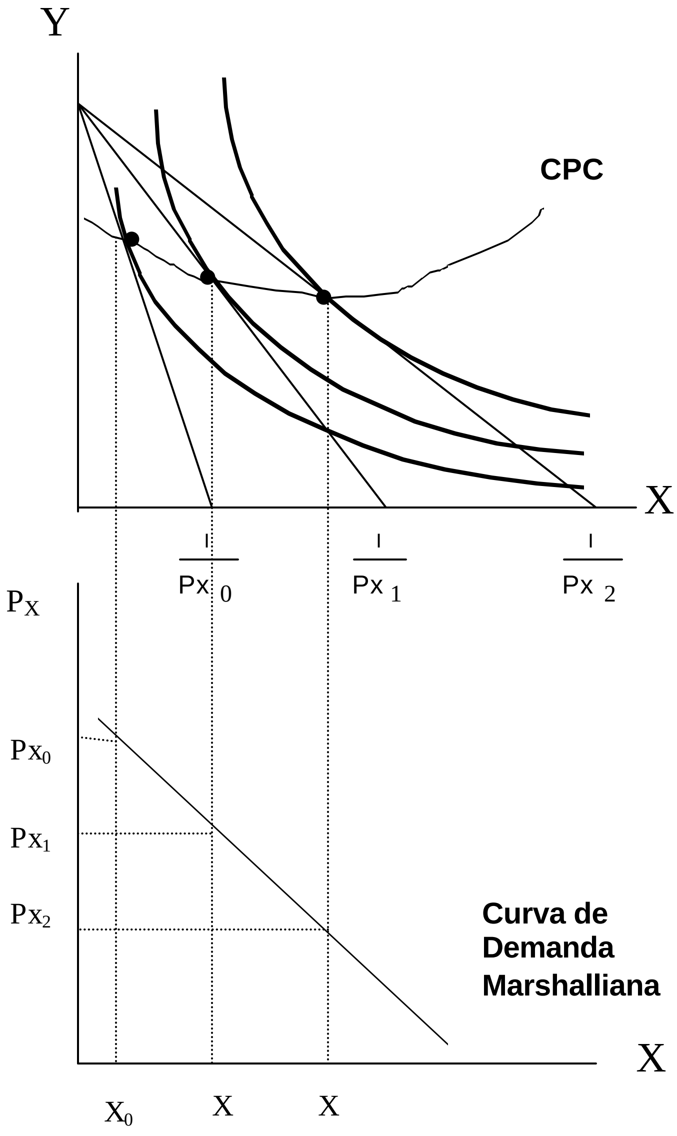
Además para un individuo, un mismo bien podría ser normal para cierto intervalo de renta pero inferior para otros niveles de ingreso. Por ejemplo, si el ingreso de la persona inicialmente es muy bajo y luego se incrementa en una pequeña proporción, tal vez podría demandar más del bien "ropa de baja calidad" por lo que sería un bien normal. Pero si el ingreso se incrementa en gran medida, es muy probable que el consumo del bien "ropa de baja calidad" disminuya porque el consumidor buscará alternativas que antes estaban fuera de su alcance. Entonces, para niveles de ingreso mayores, dicho bien es un bien inferior. En estos casos, las curvas de Engel tienen un tramo de pendiente negativa y otro de pendiente positiva.



Matemáticamente basta con observar el signo de la derivada $\frac{\partial X}{\partial I}$. Si es mayor o igual a cero, se trata de un bien norma, si en negativa, es un bien inferior.

II.11.2 <u>*Cambios en los precios*</u>.- Supongamos que el precio del bien X se reduce de Px a Px'. Esta reducción hace que la recta de presupuesto gire hacia fuera sobre el eje Y con un nuevo intercepto sobre el eje X, lo cual expande el conjunto factible, y permite alcanzar canastas con niveles de utilidad mayores.

Gráficamente,



La reducción del precio de X hace girar la recta de presupuesto hacia fuera. Para cada nueva recta existe un punto de optimización donde el consumidor maximiza su utilidad.

La unión de estas canastas optimas es la **Curva de Precio Consumo (CPC)**.

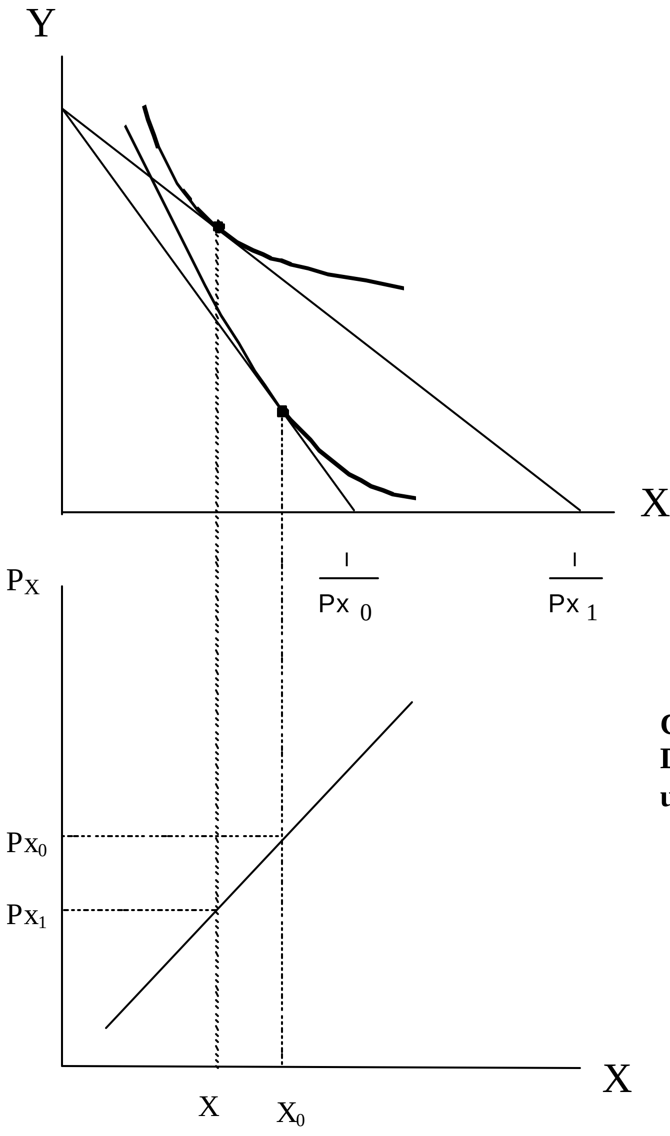
Conforme baja el precio de X aumenta la cantidad demandada de este bien. Esta relación entre las cantidades demandadas del bien x y los precios se expresan en la **Curva de Demanda Marshalliana.**

La curva de demanda muestra las máximas cantidades que demandará el consumidor a cada precio. Nótese que en cada punto de la curva de demanda el consumidor maximiza su utilidad sujeto a su restricción presupuestaria.

También es posible construir una curva de demanda para el bien Y. Simplemente hay que alterar el precio de Y dejando constante el precio de X y el ingreso.

En el gráfico anterior se observa que el problema de maximización de utilidad permite deducir curvas de demanda donde se cumple la *"ley de la demanda"*, la cual afirma que los consumidores demandan mayores cantidades de un bien si el precio se reduce. Sin embargo, el modelo del comportamiento del consumidor también permite analizar aquel caso en que no se cumple la *"ley de la demanda"*, conocido en la literatura como la *paradoja de Giffen*.

El siguiente gráfico muestra este caso.



Si el precio del bien X baja de X_0 a X_1, la cantidad demandada de este bien bajará.

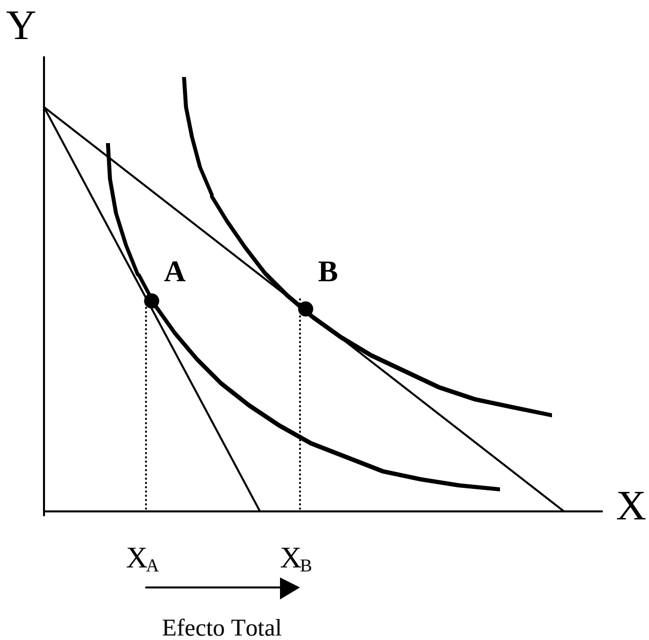
La curva de demanda en este caso tiene pendiente positiva.

Curva de Demanda de un bien Giffen

II.12 El efecto sustitución y el efecto ingreso

Cuando se produce la variación en uno de los precios manteniendo todo lo demás constante se producen dos efectos: un cambio en el precio relativo de dicho bien con respecto al otro, y un cambio en el poder adquisitivo o ingreso real del consumidor. Por ejemplo, si el precio del bien X disminuye, este bien se vuelve relativamente más barato que el bien Y, o lo que es lo mismo el bien Y se ha vuelto relativamente más caro que X. Además la disminución del precio de X incrementa el ingreso real del consumidor.

Gráficamente la caída en el precio de X hace girar la recta de presupuesto, el conjunto factible se expande y el consumidor está en capacidad de adquirir canastas con mayores niveles de utilidad. En el gráfico siguiente, el consumidor pasa de la canasta A a la canasta B.

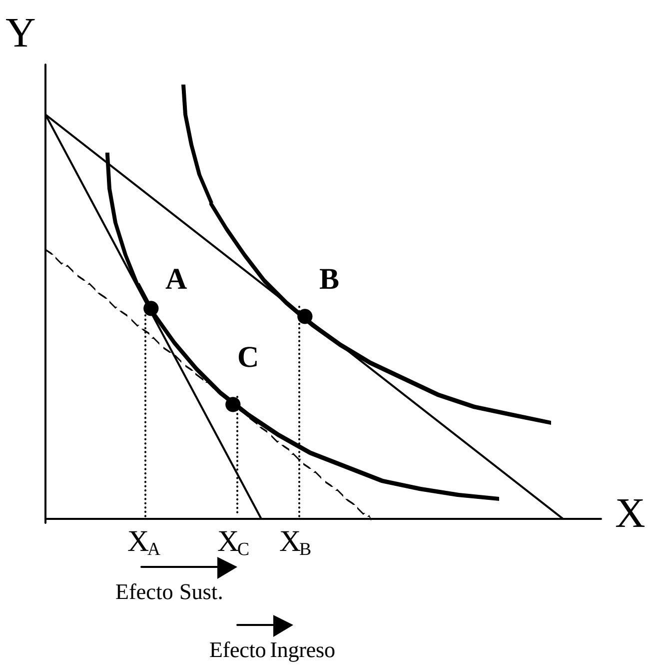


El *efecto total* de la caída del precio de X sobre el consumo de dicho bien es la diferencia $X_B - X_A$.

Este incremento en el consumo de X puede explicarse por los dos factores mencionados: el bien X ahora es más barato en términos relativos que Y, y el ingreso real del consumidor ha aumentado. De hecho el efecto total es la suma de ambos efectos, los cuales llevan el nombre de efecto sustitución y efecto ingreso respectivamente.

Definición: El *Efecto Sustitución* es el cambio en la cantidad demandada de un bien debido únicamente al cambio en el precio relativo. El *Efecto Ingreso* es el cambio en la cantidad demandada debido a una variación en el poder adquisitivo.

¿Qué parte del efecto total corresponde al efecto sustitución y qué parte corresponde al efecto ingreso? Es imposible responder esta pregunta a menos que se defina un método de descomposición del efecto total. El método que vamos a presentar es el Método de Hicks. El método consiste en dibujar una recta de presupuesto paralela a la recta de presupuesto nueva y que sea tangente a la curva de indiferencia original (punto C).

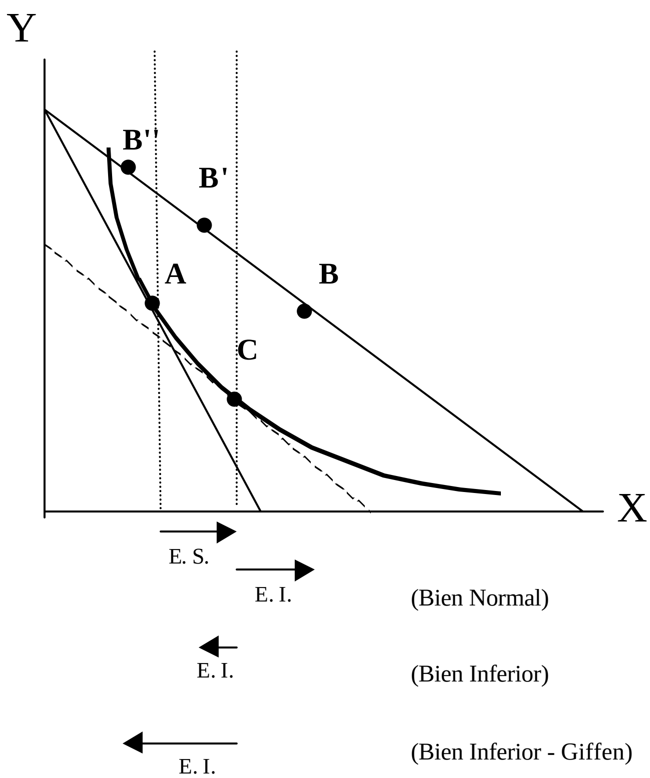


Suponiendo que el precio de X baja de Px a Px', la pendiente de la recta que pasa por A es $-\frac{Px}{Py}$ y la pendiente que pasa por B y C es $-\frac{Px'}{Py}$.

La distancia $X_C - X_A$ es el efecto sustitución mientras que $X_B - X_C$ es el efecto ingreso.

El método asume que entre los puntos A y C no hay diferencia en cuanto al ingreso real debido a que con ambas restricciones presupuestarias se puede alcanzar le mismo nivel de utilidad[1]. Por lo tanto, el paso de A a C muestra únicamente el efecto del cambio en el precio relativo sobre el consumo de X y de Y (Efecto Sustitución). Mientras tanto, el paso de C a B muestra únicamente el cambio en el consumo debido a que el ingreso real se ha incrementado sin ningún cambio de los precios relativos (Efecto Ingreso).

El gráfico anterior asume que el bien X es un bien normal, pues mientras mayor sea el ingreso, mayor es el consumo de este bien. Si X fuera un bien inferior, el punto B se ubicaría arriba y a la izquierda de C, pero a la derecha de A. Mientras que si fuera el caso Giffen, B se ubicaría arriba y a la izquierda de A. Gráficamente



El punto de B corresponde al caso del bien normal. Si el punto de consumo es B', entonces X es inferior, y si es B'' entonces es un bien Giffen.

Nótese que en el caso normal, el efecto sustitución y el efecto ingreso van en el mismo sentido mientras que en el caso inferior van en sentido contrario. Por ello, el bien Giffen es un bien inferior. La diferencia entre los bienes inferiores en general y los bienes inferior – Giffen es que en el último caso, el efecto ingreso es tan fuerte que supera el efecto sustitución. Por ello tenemos como resultado a curvas de demanda ordinarias de pendiente positiva.

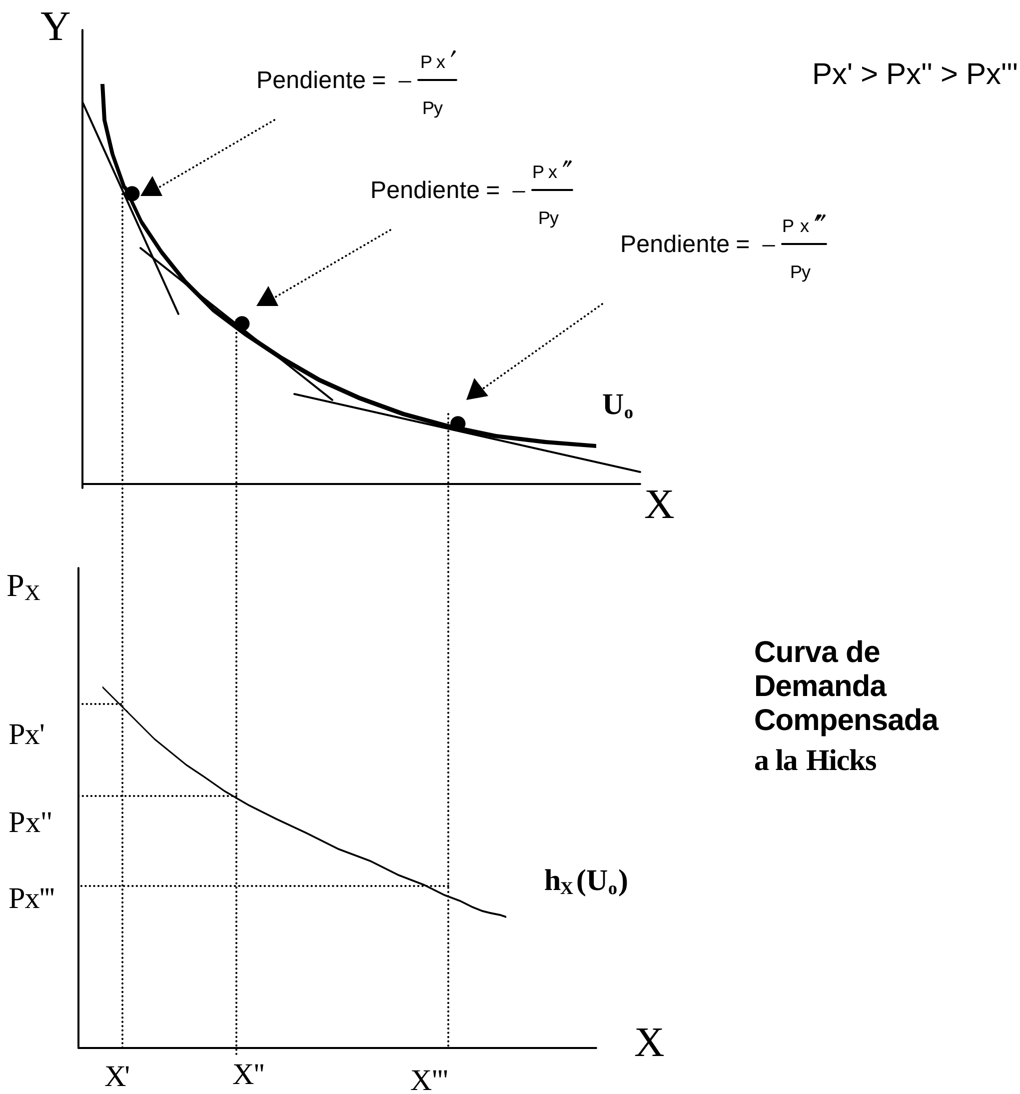
II.13 La curva de demanda compensada (a la Hicks)

Existe otra definición de curva de demanda, la cual excluye los efectos ingreso debido a variaciones en los precios. Estas curvas, llamadas *curvas de demanda compensadas*, consideran únicamente al efecto sustitución.

La construcción gráfica de esta curva toma en cuenta el método de descomposición de los efectos ingreso y sustitución. Se fija un nivel de utilidad y se hace variar el precio del bien X, manteniendo el ingreso real constante. Según este método, cada nueva recta de presupuesto debe ser tangente a la curva de indiferencia especificada.

[1] Un método alternativo es el de Slutsky el cual afirma que el ingreso real no se altera si la recta de presupuesto punteada pasa por el punto A.

Gráficamente la curva de demanda compensada a la Hicks (o curva de demanda "Hicksiana") se construye así:

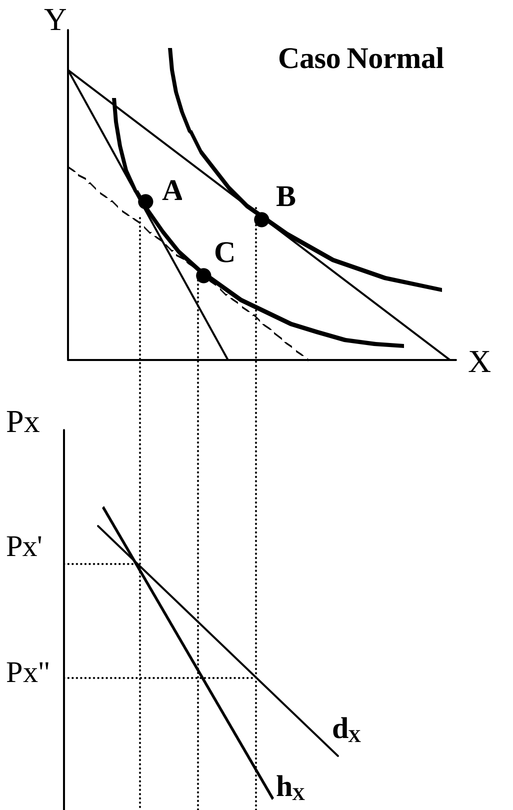


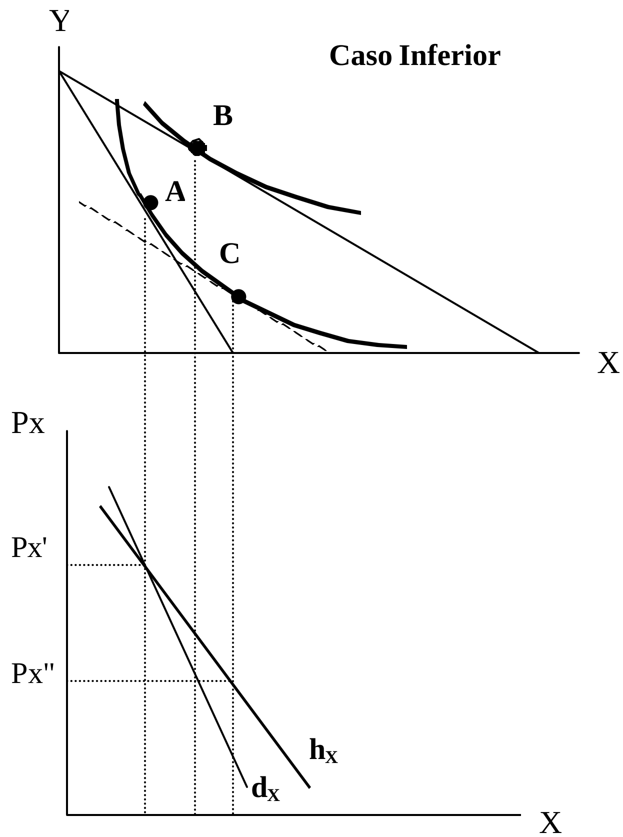
Formalmente se define de la siguiente forma:

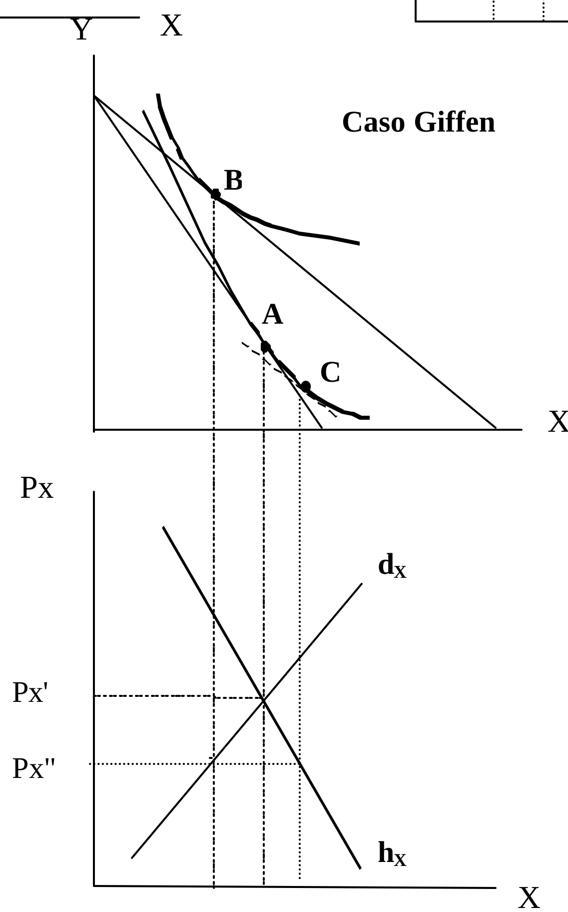
Definición: Una *curva de demanda compensada* es la relación existente entre el precio del bien y las cantidades demandadas, asumiendo que los otros precios y el nivel de utilidad se mantienen constantes. Una *función de demanda compensada* h_X(Px, Py, U) muestra la relación existente entre precios y utilidad U con las cantidades demandadas del bien X cuando no existe ningún efecto ingreso.

Es interesante hacer una comparación entre la curva de demanda compensada y la marshalliana. Veamos los casos de bienes normales, inferiores e inferiores Giffen.

En el caso de los bienes normales, en el siguiente gráfico puede observarse que la curva de demanda ordinaria o marshalliana es más echada que la curva de demanda compensada o hicksiana. Esto se debe al efecto ingreso, el cual es la diferencia horizontal en ambas curvas. En el caso inferior la curva de demanda compensada es más echada que la marshalliana, debido a que el efecto ingreso -al ir en sentido contrario al efecto sustitución- reduce el efecto total. En el caso Giffen, la curva marshalliana tiene pendiente positiva pero la compensada tiene pendiente negativa. Es importante notar que la curva de demanda compensada hereda la pendiente de la curva de indiferencia.







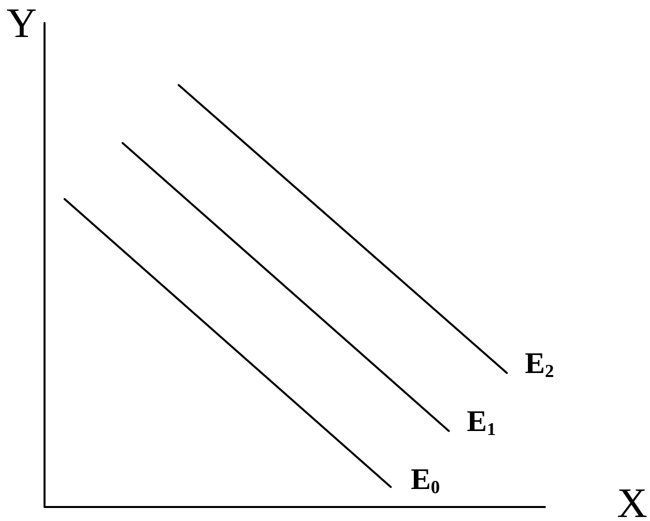
II.14 El problema dual del consumidor

El problema matemático "primal" de maximización de utilidad sujeto a restricciones va acompañado de un problema "dual" de minimización. Antes de plantear el problema dual definamos un concepto.

<u>*Definición*</u>: Una *"recta de isogasto"* es el conjunto de todas aquellas canastas tales que el gasto realizado en aquellas canastas es el mismo.

$$E(X,Y) = Px.X + Py.Y$$

Gráficamente las rectas de Isogasto son rectas de nivel (similares a las curvas de indiferencia) donde las rectas ubicadas hacia arriba y a la derecha representan niveles de gasto mayores.

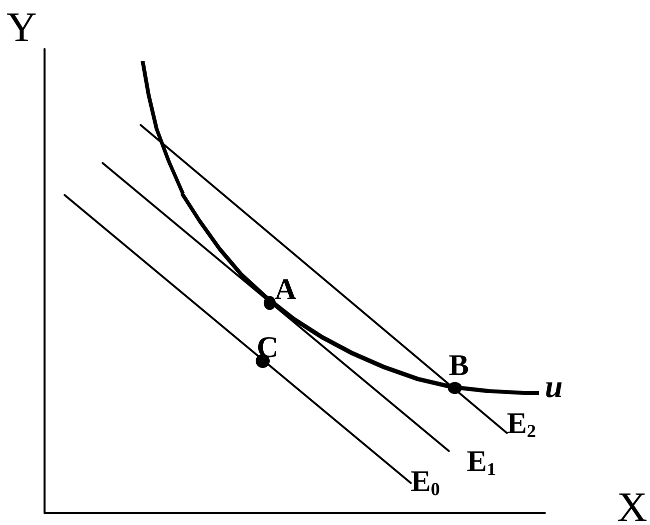


Las canastas de la recta E_2 cuestan más que las canastas de la recta E_1, y éstas que las canastas de E_0.

La pendiente de las rectas es $-\frac{Px}{Py}$.

El problema dual del consumidor se define de la siguiente forma. Supóngase que el consumidor desea alcanzar un nivel de utilidad *u*. ¿Cuál es el gasto mínimo necesario para alcanzar el nivel de utilidad *u*? ¿Cuál es la canasta que permite alcanzar *u* con el menor gasto posible?

El siguiente gráfico muestra el problema dual



Adquiriendo la canasta A se consigue el nivel de utilidad *u* al menor gasto posible.
La canasta B también tiene el mismo nivel de utilidad pero con un gasto mayor.
La canasta C se consigue con un menor gasto pero no alcanza el nivel de utilidad *u*.

El gasto mínimo necesario para alcanzar el nivel de utilidad *u* es E_1.

Matemáticamente el problema dual es un problema de minimización de gasto sujeto a alcanzar un determinado nivel de utilidad.

$$\min_{X,\ Y} \quad Px \cdot X + Py \cdot Y$$
$$\text{s.a.} \quad u \leq U(X,\ Y)$$

El "lagrangeano" del problema es

$$L\,(X,\ Y, \lambda) = Px \cdot X + Py \cdot Y + \lambda(u - U(X,\ Y))$$

Las condiciones de primer orden son

$$\frac{\partial L}{\partial X} = Px - \lambda \frac{\partial U}{\partial X} = 0 \qquad (1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial Y} = Py - \lambda \frac{\partial U}{\partial Y} = 0 \qquad (2)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = u - U(X,\ Y) = 0 \qquad (3)$$

de donde se obtiene que en el óptimo la pendiente de la curva de indiferencia es tangente a la recta de isogasto.

$$\frac{UMgX}{UMgY} = \frac{Px}{Py}$$

****
EJERCICIO: Dada la función de utilidad U(X,Y)=XY, resuelva el problema de minimización de gasto min Px.X + Py.Y s.a. XY=*u*.

El lagrangeano del problema es:

$$L\,(X,\ Y, \lambda) = Px \cdot X + Py \cdot Y + \lambda(u - XY)$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial L}{\partial X} = Px - \lambda Y = 0 \qquad (1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial Y} = Py - \lambda X = 0 \qquad (2)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = u - XY = 0 \qquad (3)$$

De (1) y (2) se obtiene la ecuación (4) $Y = \frac{Px}{Py} \cdot X$. Reemplazando esta ecuación en la restricción tenemos la función de demanda compensada o "hicksiana" de X.

$$X \cdot \left(\frac{Px}{Py} \cdot X \right) = u$$

$$X^2 \cdot \left(\frac{Px}{Py} \right) = u$$

$$X = \left(\frac{Py}{Px} \cdot u \right)^{\frac{1}{2}} \equiv h_X (Px,\ Py,\ u)$$

Reemplazando esta función en (4) se obtiene la demanda compensada de Y.

$$Y = \frac{Px}{Py} \cdot \left(\frac{Py}{Px} \right)^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}}$$

$$Y = \left(\frac{Px}{Py} \right)^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}}$$

$$Y = \left(\frac{Px}{Py} \cdot u \right)^{\frac{1}{2}} \equiv h_Y (Px,\ Py,\ u)$$

****

¿Cuál es el gasto mínimo? Se obtiene reemplazando las funciones de demanda compensada en la ecuación de Isogasto. El resultado es la *Función de Gasto*.

Definición: La *"Función de Gasto"* del consumidor muestra los gastos mínimos necesarios para alcanzar un determinado nivel de utilidad u, dados los precios de los bienes Px y Py. Matemáticamente es la función compuesta

$$e(Px,\ Py,\ u) \equiv Px \cdot h_X (Px,\ Py,\ u) + Py \cdot h_y (Px,\ Py,\ u)$$

****

EJERCICIO: En el ejercicio anterior la función de gasto es

$$e(Px,\ Py,\ u) = Px \cdot \left(\frac{Py}{Px} \cdot u \right)^{\frac{1}{2}} + Py \cdot \left(\frac{Px}{Py} \cdot u \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \cdot Px^{\frac{1}{2}} \cdot Py^{\frac{1}{2}} \cdot u^{\frac{1}{2}}$$

Si Px=2, Py=2, u=4, entonces (X*,Y*)= (2,2) y el gasto mínimo para alcanzar dicho nivel de utilidad es e = $2.(2)^{½}.(2)^{½}.(4)^{½}$ = 8.

****

****

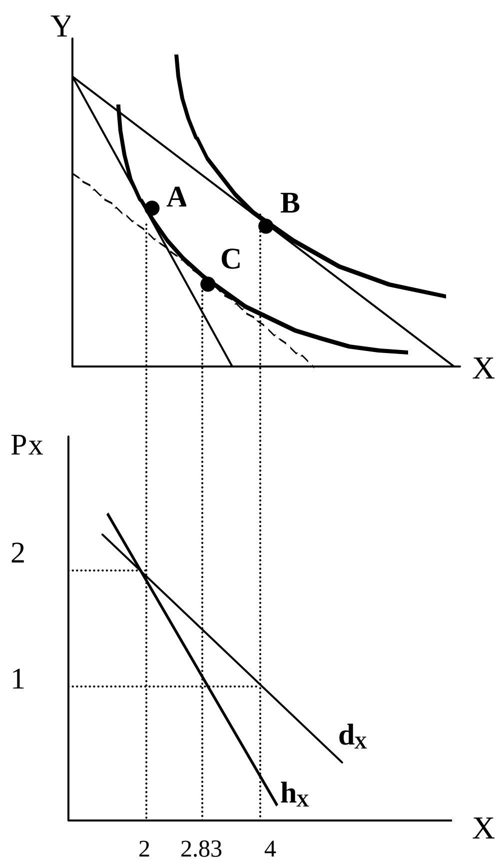
EJERCICIO: Un consumidor tiene preferencias representadas por la función de utilidad U(X,Y)=XY. Este consumidor tiene un ingreso de I=8 y enfrenta los precios de mercado Px=2, Py=2. Luego el precio de X baja a Px'=1. Calcule el efecto sustitución, el efecto ingreso y el efecto total utilizando las curvas de demanda marshalliana y hicksiana.

Calcularemos el efecto sustitución y el efecto ingreso utilizando las curvas de demanda marshalliana y hicksiana. Es fácil encontrar que para esta función de utilidad las curvas de demanda son

$$X(Px,\ Py,\ I) = \frac{I}{Px} \qquad\qquad h_X(Px,\ Py,\ u) \equiv \left(\frac{Py}{Px}\cdot u\right)^{\frac{1}{2}}$$

El nivel de utilidad óptimo del problema "primal" está dado por la utilidad indirecta que en este caso es V*=4 (utilidad en el punto A del siguiente gráfico). Esta misma curva de indiferencia sirve de referencia para construir la demanda hicksiana, por lo tanto hacemos que *u*=4. Para los valores mencionados de precios, ingreso y utilidad, las cantidades demandadas marshallianas y hicksianas son exactamente iguales: $X=h_X=2$.

Si el precio del bien X baja a 1, entonces la cantidad demandada marshalliana aumenta a X=4, pero la hicksiana sólo aumenta a $h_X = \left(\frac{2}{1}\cdot 4\right)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \approx 2.83$.



El efecto sustitución debido a la caída en el precio de X es 0.83 mientras que el efecto ingreso es aproximadamente 1.17.

****

II.15 Relación entre los problemas "primal" y "dual"

Problema "Primal"

$$\max_{x,\,y} \; U(X,\ Y)$$

$$\text{s.a.} \quad Px \cdot X + Py \cdot Y \leq I$$

de donde se obtienen

$$X(Px,\ Py,\ I)$$

$$Y(Px,\ Py,\ I)$$

$$V(Px,\ Py,\ I) = U\left(X(Px,\ Py,\ I),\ Y(Px,\ Py,\ I)\right)$$

Problema "Dual"

$$\min_{x,\,y} \; Px \cdot X + Py \cdot Y$$

$$\text{s.a.} \quad u \leq U(X,\ Y)$$

de donde se obtienen

$$h_x(Px,\ Py,\ u)$$

$$h_y(Px,\ Py,\ u)$$

$$e(Px,\ Py,\ u) = Px \cdot h_x(Px,\ Py,\ u) + Py \cdot h_y(Px,\ Py,\ u)$$

Ambos problemas dan la misma solución (la misma canasta óptima) si u = V(Px,Py,I) y si e(Px,Py,u)=I.

Además, las funciones V(Px,Py,I) y e(Px,Py,u) son una la inversa de la otra.

Por ejemplo, para la función de utilidad U(X,Y)=XY, la función de utilidad indirecta es $V(Px,\ Py,I) = \frac{I^2}{4Px \cdot Py}$. Haciendo u=V y e=I se tiene $u = \frac{e^2}{4Px \cdot Py}$ y despejando "e" se tiene

$$e(Px,\ Py,\ u) = 2 \cdot Px^{\frac{1}{2}} \cdot Py^{\frac{1}{2}} \cdot u^{\frac{1}{2}}$$

que es la función de gasto que habíamos calculado previamente.

II.16. Demanda Individual y de Mercado

Hasta el momento hemos deducido la demanda individual de cada consumir a partir del problema de maximización de utilidad sujeto a la restricción presupuestaria. Sin embargo, en la sociedad existen muchos individuos, cada uno con sus propios ingresos y con gustos y preferencias particulares. Cada uno de ellos tiene una *demanda individual* por los bienes.

La agregación de todas las demandas individuales da como resultado la *demanda del mercado* o demanda agregada.

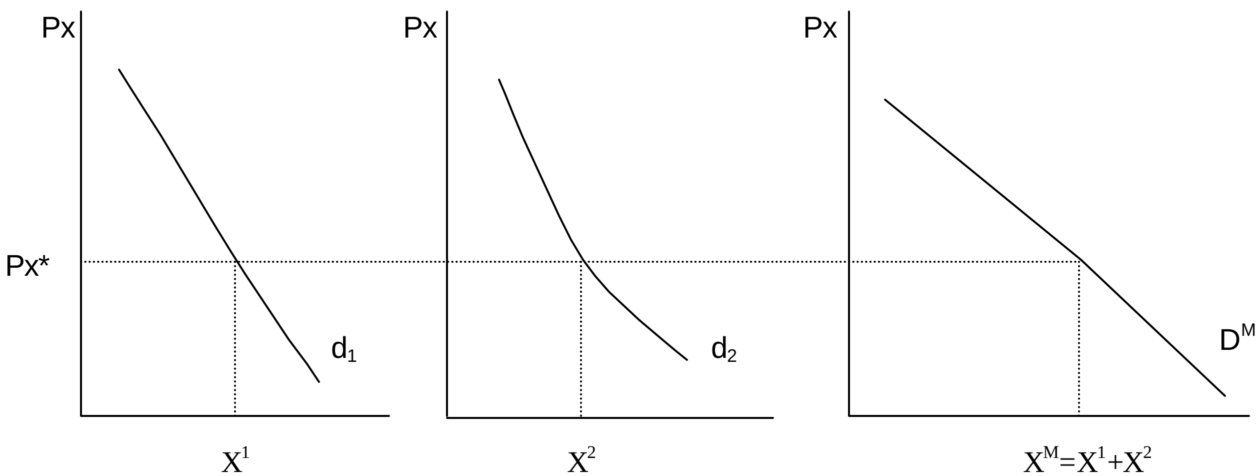
Definición: La *"función de demanda de mercado"* de un bien X es la suma de las demandas de ese bien de los "m" individuos.

$$X(Px,\ Py,\ I^1,\ldots,I^m) = \sum_{i=1}^{m} X^i(Px,\ Py,\ I^i)$$

Por ejemplo, supongamos que tenemos dos individuos en la economía, cada uno con demandas X^1 y X^2, entonces la demanda de mercado será la suma de las cantidades demandadas de los consumidores para cada precio

$$X^M(Px, Py, I^1, I^2) = X^1(Px, Py, I^1) + X^2(Px, Py, I^2)$$

Gráficamente:



En el gráfico, $X^M = X^1 + X^2$ lo que significa que la cantidad demandada de mercado del bien X cuando el precio es Px* es la suma de las cantidades demandadas individuales.

Observaciones:

La curva de demanda agregada puede desplazarse ante cambios en los otros precios (Py) y ante cambios en el ingreso de los individuos. Sin embargo, el análisis de este desplazamiento es complejo.

Por ejemplo en el caso de dos individuos, si aumenta el ingreso de los individuos, la demanda agregada podría desplazarse hacia fuera o hacia dentro dependiendo de si el bien es normal o inferior para los individuos. Si el bien es normal para ambos, la demanda del mercado se desplazará a la derecha con toda seguridad. Si el bien es inferior para ambos, se desplazará a la izquierda. Pero si el bien es normal para uno pero inferior para otro, el desplazamiento es ambiguo y dependerá de la sensibilidad de la demanda ante variaciones en el ingreso, así como de la participación de estos individuos en el mercado.

De la misma forma, un aumento del precio del otro bien (Py) puede desplazar a la curva de demanda hacia fuera o hacia dentro dependiendo de si X y Y son sustitutos o complementarios para los consumidores, y dependiendo del peso de estos consumidores en el mercado.

La demanda del mercado posee la propiedad de ser sensible a redistribuciones en el ingreso. Esto quiere decir que, si por ejemplo aplicamos un impuesto al ingreso del individuo 1 y se lo entregamos al individuo 2 a manera de subsidio, la demanda podría desplazarse, aún si el ingreso total $I^1 + I^2$ no se altera.

La explicación de esta propiedad está en la sensibilidad de las demandas individuales ante variaciones en el ingreso. No todas las personas reaccionan de la misma forma ante cambios en el ingreso (matemáticamente $\frac{\partial x^i}{\partial I^i} \neq \frac{\partial x^j}{\partial I^j}$).
Por ejemplo, cuando se aplican políticas redistributivas (impuestos a los más ricos para entregarlos a los más pobres). La demanda agregada por alimentos se incrementará.

****
EJERCICIO: *(Nicholson, Pág. 129)*
Considérese las siguientes demandas individuales

Individuo 1: $X^1=10 - 2\ Px + 0.5\ Py + 0.1\ I^1$
Individuo 2: $X^2=17 - Px + 0.5\ Py + 0.5\ I^2$

La demanda de mercado es la suma de las dos demandas individuales.

Mercado: $X = X^1 + X^2 = 27 - 3\ Px + Py + 0.1\ I^1 + 0.5\ I^2$

Si $Px = 1$, $Py = 1$, $I^1 = 100$, $I^2 = 100$, las cantidades demandadas son $X^1 = 18.5$, $X^2 = 66.5$ y $X = 85$.

Si se redistribuye el ingreso y ahora $I^1 = 150$, $I^2 = 50$, las cantidades demandadas ahora son: $X^1 = 23.5$, $X^2 = 41.5$ y $X = 65$.

Es evidente que la cantidad demandada de mercado cambió pese a que el ingreso total del mercado se mantuvo constante $I^1 + I^2 = 200$.
****

II.17 La ecuación de Slutsky

Utilizando la dualidad podemos hacer un tratamiento formal del efecto sustitución y del efecto ingreso.

Partimos de la siguiente equivalencia

$$h_x(Px, Py, u) = X(Px, Py, e(Px, Py, u))$$

Derivando respecto a Px tenemos

$$\frac{\partial h_x}{\partial Px} = \frac{\partial X}{\partial Px} + \frac{\partial X}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial Px}$$

reordenando esta ecuación

$$\frac{\partial X}{\partial Px} = \frac{\partial h_x}{\partial Px} - \frac{\partial X}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial Px}$$

Como e = I cuando se cumple la equivalencia, y utilizando un resultado conocido como el *lema de Shepard* el cual dice que $\frac{\partial e}{\partial Px} = h_X$

$$\frac{\partial X}{\partial Px} = \frac{\partial h_x}{\partial Px} - \frac{\partial X}{\partial I} \cdot X$$

Esta ecuación es conocida como la *"Ecuación de Slutsky"*. El primer término $\frac{\partial X}{\partial Px}$ muestra la variación en la cantidad demandada marshalliana ante una variación infinitesimal del precio. Esto es el "efecto total" o la pendiente de la demanda marshalliana. El segundo término $\frac{\partial h_x}{\partial Px}$ corresponde al "efecto sustitución" o la pendiente de la demanda hicksiana. El término restante es el "efecto ingreso".

Es interesante observar los signos de estos términos. La derivada de la hicksiana respecto al precio siempre es negativa siempre y cuando la curva de indiferencia tenga pendiente negativa. En término del efecto ingreso $-\frac{\partial X}{\partial I} \cdot X$ puede ser positivo o negativo dependiendo del tipo de bien. Para un bien normal, este término es negativo mientras que para un bien inferior este es positivo (tiene signo contrario al efecto sustitución).

En el caso de los bienes Giffen (los cuales son un caso particular de los bienes inferiores) este efecto ingreso es superior al efecto sustitución. En resumen

	Efecto Total	=	Efecto Sustitución	+	Efecto Ingreso
Bien Normal	(−)	=	(−)	+	(−)
Bien Inferior	(−)	=	(−)	+	(+)
Bien Inferior Giffen	(+)	=	(−)	+	(+)

II.18 Elasticidades

Algunas veces es interesante medir la *sensibilidad* de la cantidad demandada de un bien ante el incremento de los precios. Una forma de medir la sensibilidad es por medio de la derivada de la demanda con respecto al precio $\frac{\partial X}{\partial Px}$. Sin embargo, esta medida de sensibilidad no es buena porque depende de las unidades de medida de los bienes.

Para solucionar este problema se ha creado el concepto de elasticidad, el cual es independiente de las unidades de medida de los bienes.

(a) La Elasticidad Precio de la Demanda:

Indica cómo cambia la cantidad demandada (en términos porcentuales) de un bien ante una variación porcentual del precio.

$$\varepsilon_{X,\,P} = \frac{\Delta\%X}{\Delta\%Px} = \frac{\frac{\Delta X}{X}}{\frac{\Delta Px}{Px}} \cong \frac{\partial X}{\partial Px}\cdot\frac{Px}{X}$$

Por ejemplo, si $\varepsilon = -2$ esto significa que una aumento del 1% en el precio provoca una reducción del 2% en la cantidad demandada del bien.

Dependiendo del valor absoluto de la elasticidad precio de la demanda, las curvas de demanda pueden tener las siguiente clasificación:

$|\varepsilon_{x,Px}| = \infty$ Demanda perfectamente elástica

$|\varepsilon_{x,Px}| > 1$ Demanda elástica

$|\varepsilon_{x,Px}| = 1$ Demanda de Elasticidad Unitaria

$|\varepsilon_{x,Px}| < 1$ Demanda inelástica

$|\varepsilon_{x,Px}| = 0$ Demanda perfectamente inelática

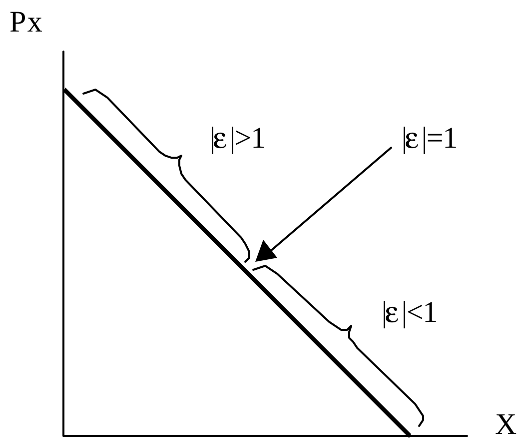
En los casos elásticos la cantidad demandada es muy sensible a las variaciones de los precios. En el caso inelástico la reacción es pequeña (poco sensible).

EJEMPLOS:

* Se dice que la demanda por medicinas es inelástica debido a que aumentos o reducciones en los precios no alteran en gran medida a las cantidades demandas.

* Por otro lado la demanda por carne de pollo es elástica, pues alzas o reducciones del precio del pollo alteran en gran medida a las cantidades demandadas, debido a la existencia de muchos sustitutos al pollo.

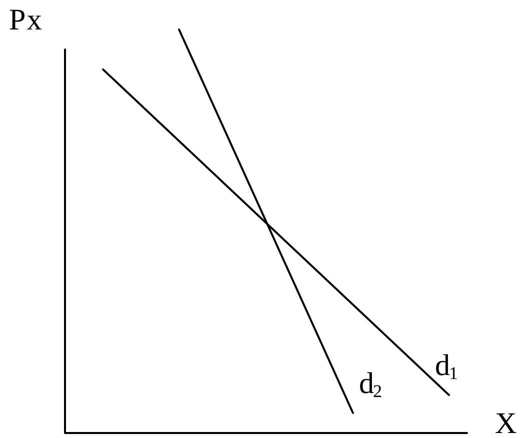
La elasticidad de la demanda puede cambiar a lo largo de la curva de demanda, pudiéndose tener un tramo elástico, un tramo unitario y uno inelástico. Esto ocurre en el caso de la *demanda lineal* $X = a - b\,P$, donde a y b son constantes positivas.



En el caso de la demanda lineal, en el punto medio de esta recta la elasticidad es unitaria. Por encima de este punto la demanda es elástica, mientras que por debajo es inelástica.

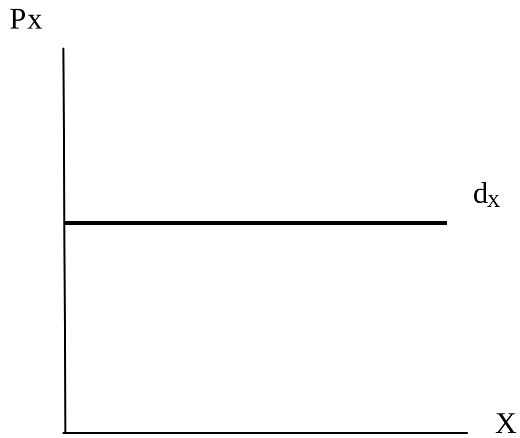
Cabe aclarar que no todas las demandas marshalianas tienen esta propiedad.

Es importante notar que la elasticidad no es lo mismo que la pendiente de la curva. En el gráfico anterior la pendiente es constante pero la elasticidad varía a lo largo de la curva.



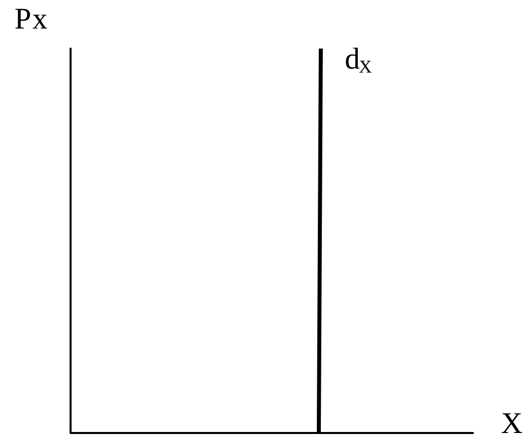
En este gráfico, la demanda d_1 es más elástica que la demanda d_2 en el punto de intersección de las curvas.

En los casos extremos de demanda perfectamente elástica y demanda perfectamente inelástica, la demanda es horizontal y vertical respectivamente.



$|\varepsilon| \rightarrow \infty$

Demanda Perfectamente Elástica



$|\varepsilon| = 0$

Demanda Perfectamente Inelástica

(b) Elasticidad Ingreso de la Demanda

Es una medida de la sensibilidad de la cantidad demandada ante cambios en el ingreso. Indica cuánto cambia (en términos porcentuales) la cantidad demandada ante una variación porcentual del ingreso.

$$\varepsilon_{X,I} = \frac{\Delta\% X}{\Delta\% I} = \frac{\frac{\Delta X}{X}}{\frac{\Delta I}{I}} \cong \frac{\partial X}{\partial I} \cdot \frac{I}{X}$$

Es fácil ver que si $\varepsilon_{X,I} \geq 0$ entonces se trata de un bien normal, pues la demanda reacciona en forma directa a la variación en el ingreso. Si $\varepsilon_{X,I} < 0$ entonces es un bien inferior (la reacción de la demanda es inversa a la variación en el precio).

Cuando $\varepsilon_{X,I} > 1$ se dice que es un bien "de lujo" pues la cantidad demandada reacciona en mayor proporción a la variación en el ingreso. Si $0 < \varepsilon_{X,I} \leq 1$ entonces se dice que es un bien "necesario".

(c) Elasticidad Precio Cruzada

Indica cuánto cambia la cantidad demandada (en términos porcentuales) ante variaciones en los precios de los otros bienes.

$$\varepsilon_{X,Py} = \frac{\Delta\% X}{\Delta\% Py} = \frac{\frac{\Delta X}{X}}{\frac{\Delta Py}{Py}} \cong \frac{\partial X}{\partial Py} \cdot \frac{Py}{X}$$

La elasticidad precio de la demanda hereda el signo de la derivada de X respecto a Py. Si $\varepsilon_{X,Py} > 0$ entonces se trata de bienes sustitutos brutos[2], y si $\varepsilon_{X,Py} < 0$ entonces X y Y son bienes complementarios brutos. Finalmente si $\varepsilon_{X,Py} = 0$, los bienes son "no relacionados".

****
EJERCICIO: Calcule la elasticidad precio, ingreso y precio cruzada para las siguientes funciones de demanda marshalliana. Evalúe estos valores en Px=2, Py=1, I=20.

(a) $X(Px, \quad Py, I) = \dfrac{I}{2 \cdot Px}$

(b) $X(Px, \quad Py, I) = \dfrac{I}{Px + Py}$

Solución:

(a) $$\varepsilon_{x,Px} = -\frac{I}{2 \cdot Px^2} \cdot \frac{Px}{X} = -\frac{I}{2 \cdot Px^2} \cdot \frac{Px}{\frac{I}{2 \cdot Px}} = -1$$

$$\varepsilon_{x,I} = \frac{1}{2 \cdot Px} \cdot \frac{I}{X} = \frac{1}{2 \cdot Px} \cdot \frac{I}{\frac{I}{2 \cdot Px}} = -1$$

$$\varepsilon_{x,Py} = 0 \cdot \frac{Py}{X} = 0$$

(b) $$\varepsilon_{x,Px} = -\frac{I}{(Px + Py)^2} \cdot \frac{Px}{X} = -\frac{I}{(Px + Py)^2} \cdot \frac{Px}{\frac{I}{Px + Py}} = -\frac{Px}{Px + Py}$$

---

[2] Existe también las definiciones de "sustitutos netos" y "complementos netos" las cuales se obtienen con las demandas compensadas.

$$\varepsilon_{x,I} = -\frac{1}{Px + Py} \cdot \frac{I}{\frac{I}{Px + Py}} = 1$$

$$\varepsilon_{x,Py} = -\frac{I}{(Px + Py)^2} \cdot \frac{Py}{X} = -\frac{I}{(Px + Py)^2} \cdot \frac{Py}{\frac{I}{Px + Py}} = -\frac{Py}{Px + Py}$$

Con los valores mencionados las elasticidades son $\varepsilon_{x,Px} = -2/3$ y $\varepsilon_{x,Py} = -1/3$.

****

II.19. La elección intertemporal

Hasta ahora hemos estudiado modelos "estáticos" donde el consumidor gasta su ingreso en bienes, en un mismo período. Sin embargo, podemos extender el análisis a más de un período en donde, por ejemplo, el consumidor podría ahorrar parte de su ingreso presente con el fin de gastarlo en el futuro y mejorar su bienestar. Cuestiones como estas son analizadas por el modelo que se presenta en esta sección.

Supongamos lo siguiente:

- El consumidor vive dos períodos: 1 y 2
- En cada período recibe ingreso: I_1 en el período 1, I_2 en el período 2
- El consumo en cada periodo es: C_1 en el periodo 1 (gasto en bienes en el período 1[3])
  C_2 en el período 2 (gasto en bienes en el período 2)

En este modelo intertemporal el consumo en cada período no necesariamente coincide con el ingreso en dicho período (a diferencia del modelo estático donde el ingreso se destina únicamente a gasto en dicho período). Podemos tener lo siguiente:

$C_1 > I_1$ (el consumo del período 1 es superior al ingreso de dicho período)
ó
$C_1 < I_1$ (el consumo del período 1 es inferior al ingreso de dicho período)
ó
$C_1 = I_1$ (el consumo del período 1 es igual al ingreso de dicho período)

En el primer caso el consumidor está *endeudándose* pues su consumo excede a su ingreso. En el segundo caso el consumidor está *ahorrando* pues no gasta todo su ingreso. En el último caso ni ahorra ni se endeuda.

El elemento clave que une a los dos períodos es la posibilidad de ahorrar parte del ingreso presente (lo que permite trasladar parte del ingreso al futuro) y la capacidad de endeudarse (lo que permite traer dinero del futuro hacia el presente).
En este contexto, la restricción presupuestaria toma características particulares. En cada período es:

Período 1: $C_1 + S = I_1$ ………… (1)

Período 2: $C_2 = I_2 + S(1+r)$ ------------- (2)

[3] Es decir $C_1 = Px.X_1 + Py.Y_1$, y $C_2 = Px.X_2 + Py.Y_2$. Supongamos por simplicidad que los precios de X y Y no se alteran de período a período.

donde S = Ahorro y r = tasa de interés. En el período 1 el individuo consume o ahorra. En el período 2 su ingreso se ve incrementado por el ahorro más los intereses ganados. Este ingreso se gasta completamente en el segundo período. No tiene sentido seguir ahorrando pues el consumidor solo vive dos períodos.

Estas dos ecuaciones pueden ser agregadas con lo cual se obtiene la restricción presupuestaria intertemporal. Pero antes de sumarlas debemos tener en cuenta que ambas ecuaciones no están medidas en las misma unidades, pues la primera se mide en *soles del presente* mientras que las segunda en *soles del futuro*. Por ello, antes de agregarlas, calculamos el valor presente de la restricción del período 2[4].

Dividiendo la ecuación (2) entre 1+r obtenemos el valor presente de dicha ecuación.

Período 2: $$\frac{C_2}{1+r} = \frac{I_2}{1+r} + S \qquad \text{............ (2')}$$

Luego, sumando (1) y (2') obtenemos la restricción presupuestaria intertemporal.

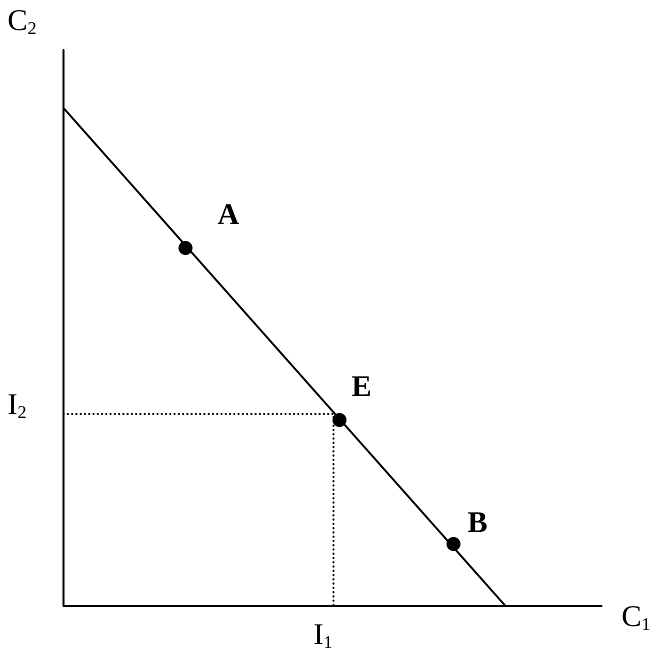
$$C_2 + \frac{C_2}{1+r} = I_1 + \frac{I_2}{1+r} \qquad \text{.............(3)}$$

El lado izquierdo de la ecuación (3) es el valor presente del consumo total de los dos períodos, y el lado derecho es el valor presente del Ingreso total de los dos períodos. Lo que dice la restricción es que el consumo total de ambos períodos no puede exceder al ingreso total.

El precio relativo del consumo presente con respecto al consumo futuro es 1+r, el cual es un costo de oportunidad. Indica cuanto dejaría de ganar por unidad monetaria ahorrada si decido consumir en el presente dicha unidad monetaria.

[4] Si en el presente tenemos una cantidad de dinero B, su *"valor futuro"* es B(1+r), donde r es la tasa de interés.
Si en el futuro tenemos una cantidad de dinero D, su *"valor actual o presente"* es D/(1+r). Por ejemplo, si tenemos 100 soles y la tasa de interés es 10%, en el futuro dicho monto valdrá 110 soles. También, si en el futuro tendremos 110 soles, el valor presente de dicho monto es 100 soles. Es evidente que 100 soles en el presente no son equivalentes a 100 soles en el futuro.

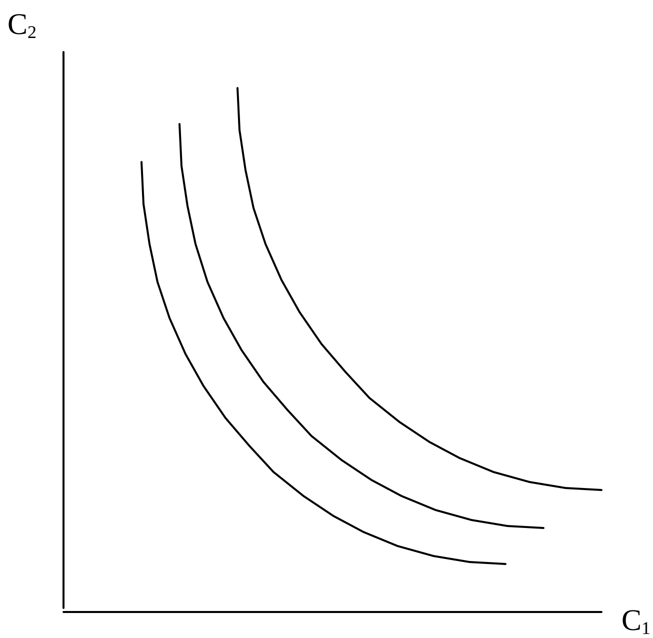
En el siguiente gráfico se representa la recta de presupuesto intertemporal.



La recta muestra todas las posibilidades de consumo intertemporal. Si la persona no puede ahorrar ni endeudarse, la única posibilidad de consumo es el punto E. Pero si puede ahorrar, está en capacidad de tener niveles de consumo tales como A. Y si puede endeudarse, es capaz de ubicarse en puntos como B.

Pendiente = $-(1+r)$

Las preferencias por consumo presente y futuro pueden representarse en el plano (C_1, C_2) mediante curvas de indiferencia como las que hemos visto antes. También estas preferencias pueden tener una representación numérica mediante funciones de utilidad del tipo U(C_1, C_2).

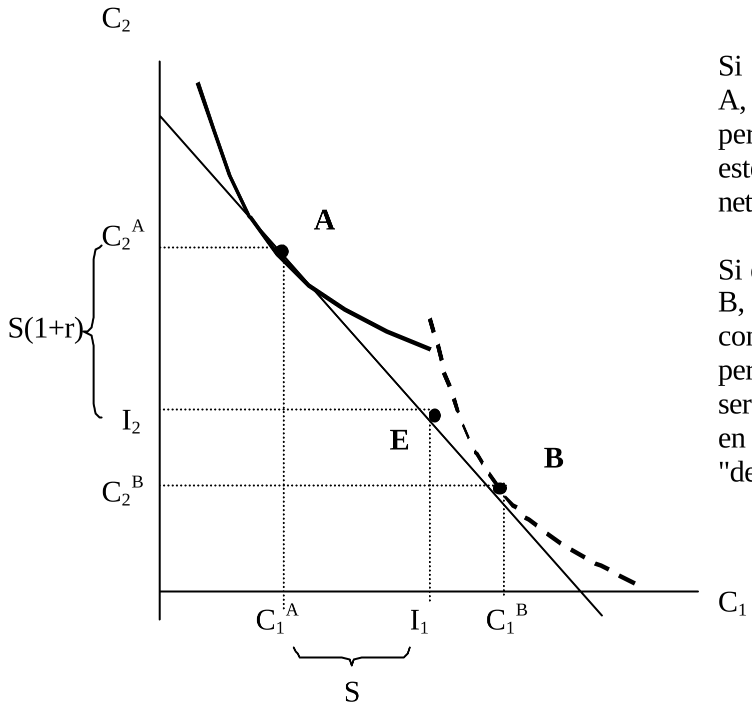


La pendiente de las curvas de indiferencia es la tasa marginal de sustitución intertemporal.

$$TMSI = \frac{\Delta C_2}{\Delta C_1}$$

Dada la restricción presupuestaria intertemporal y dadas las preferencias del consumidor, el objetivo es encontrar aquella combinación de consumo presente y futuro que maximiza la utilidad del consumidor.

Gráficamente, el óptimo se encuentra en el punto donde la recta de presupuesto es tangente a la curva de indiferencia.



Si el consumidor optimiza en el punto A, ahorra parte de su ingreso. Esto le permite consumir más en el futuro. A este consumidor se le llama "ahorrador neto".

Si el consumidor maximiza en el punto B, pide un préstamo el cual le permite consumir más que su ingreso en el período 1. Dicho préstamo tiene que ser pagado y por ello consume menos en el futuro. Este es un individuo "deudor neto".

****

EJERCICIO: Suponga que la función de utilidad de un individuo es $U(C_1, C_2) = C_1.C_2$. Obtenga el consumo en cada período y el ahorro.

Matemáticamente el problema se plantea como:

$$\max_{C_1, C_2} \quad C_1 \cdot C_2$$

$$\text{s.a.} \quad C_1 + \frac{C_2}{1+r} = I_1 + \frac{I_2}{1+r}$$

El lagrangiano del problema es

$$L(C_1, C_2, \lambda) = C_1 \cdot C_2 + \lambda(I_1 + \frac{I_2}{1+r} - C_1 - \frac{C_2}{1+r})$$

y las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial L}{\partial C_1} = C_2 - \lambda = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_2} = C_1 - \lambda \cdot \frac{1}{1+r} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = I_1 + \frac{I_2}{1+r} - C_1 - \frac{C_2}{1+r} = 0 \qquad (3)$$

Resolviendo las ecuaciones por lo métodos tradicionales obtenemos las siguientes soluciones

$$C_1 = \frac{1}{2}\left[I_1 + \frac{I_2}{1+r}\right]$$ Consumo en el período 1

$$C_2 = \frac{1+r}{2}\left[I_1 + \frac{I_2}{1+r}\right]$$ Consumo en el período 2

El ahorro del período 1 se obtiene de

$C_1 + S = I_1$

despejando S queda

$S = I_1 - C_1$

$$S = \frac{1}{2}\left[I_1 - \frac{I_2}{1+r}\right]$$

Para los valores $I_1 = 50$, $I_2 = 30$, $r = 0.1$, los consumos óptimos de cada período son

$C_1 = 38.64$
$C_2 = 42.5$
$S = 11.36$

****

<u>EJERCICIOS DE TEORIA DEL CONSUMIDOR</u>

1) Si en vez de curvas de indiferencia, existieran "bandas" de indiferencia (curvas de indiferencia gruesas), ¿qué supuestos de las preferencias se estarían violando? Explique su respuesta.

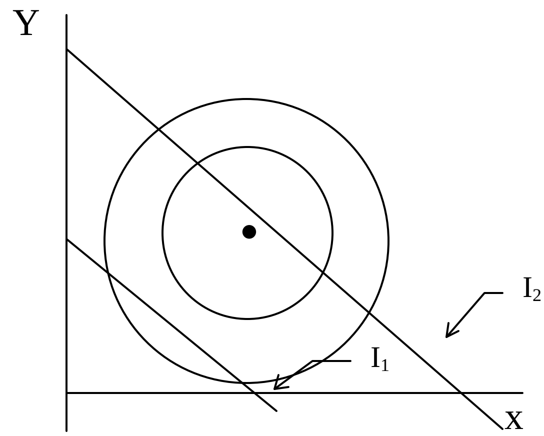
2) La curva de demanda ordinaria es más elástica que la demanda compensada porque ésta última no incorpora el efecto ingreso. Comente utilizando la <u>Ecuación de Slutsky</u>.

3) En un mundo de "n" bienes el óptimo del consumidor cuyas preferencias satisfacen los supuestos 1,2,3 y 4 se cumple cuando la utilidad marginal del último sol gastado en cada bien se iguala a la utilidad marginal del ingreso, para los "n" bienes. Verdadero o Falso. Explique.

4) En el modelo de Consumo Intertemporal presentado en clase, un individuo ahorrador neto lo será siempre sin importar el valor de la tasa de interés "r".

5) Un modelo económico es una representación simplificada de la realidad, por ello la mejor forma de evaluarlos es analizando el realismo de sus supuestos. Comente.

6) En el siguiente diagrama se representan las curvas de indiferencia de un individuo con preferencias saturables (el centro es el punto de saturación). Las líneas rectas son dos rectas de presupuesto para niveles de ingreso I_1 y I_2.



a) Identifique gráficamente las canastas óptimas de consumo para los dos niveles de ingreso I_1 y I_2.
b) ¿Cuál es la relación entre la TMgS y el precio de X en cada uno de los óptimos de la parte (a)?
c) Dibuje una curva de ingreso-consumo consistente con el diagrama.
d) Dibuje la correspondiente curva de Engel.
e) ¿Tiene algún efecto el supuesto de no saturación en las curvas de indiferencia con el hecho de gastar todo el ingreso?

7) En un mundo de 2 bienes un consumidor con preferencias "bien comportadas" (satisfacen los cuatro supuestos) optimiza cuando

$$\lambda = \frac{UMg\ X}{P_x} = \frac{UMg\ Y}{P_y}$$

Interprete económicamente (en no más de 10 líneas) esta ecuación. ¿Se seguirá cumpliendo si se levanta el supuesto de no saturación?

8) Del siguiente problema del consumidor: max $U(x, y) = x^{\alpha}y^{1-\alpha}$ s.a. $Px.X + Py.Y = I$ se obtienen las siguientes demandas marshallianas:

$$X = \frac{\alpha I}{Px} \qquad\qquad Y = \frac{(1-\alpha) I}{Py}$$

(a) Obtenga la utilidad indirecta, la función de gasto y las demandas hicksianas.
(b) Si inicialmente (Px, Py) = (2, 2), I = 8, $\alpha = 1/3$ y posteriormente Px baja a 1; encuentre los valores del Efecto Sustitución, Efecto Ingreso y Efecto Total sobre X.
(c) Según sus resultados en (a) qué puede afirmar acerca del bien X.

9) Dada la siguiente función de utilidad

$$U(x, y) = \min\left\{\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right\}$$

y la restricción presupuestaria del consumidor $Px\ X + Py\ Y \leq I$

(a) Obtenga las funciones de demanda marshallianas de los bienes X y Y, y obtenga la función de utilidad Indirecta.

(b) Dibuje la Curva de Engel por el bien X y la curva de demanda por el mismo bien.
(c) Utilizando dualidad encuentre la función de Gasto y las demandas compensadas hicksianas.
(d) Dibuje las curvas de demanda compensada y explique porqué tienen esa forma.

10) El gobierno está decidido a implementar una campaña que incentive el consumo del queso por sus múltiples beneficios alimenticios. El año anterior se implementó una campaña de *cupones*, donde se entregaba una vez al mes a cada persona un cupón válido por 100 gr. de queso. Dichos cupones no podían ser revendidos ni intercambiados por otros bienes. Sin embargo la campaña resultó en un fracaso porque diversas encuestas demostraron que el consumo de queso de las personas disminuyó o se mantuvo igual a los niveles anteriores a la campaña.

(a) Explique por qué razones económicas pudo fallar esta iniciativa. Ayúdese con dibujos.

Debido a este fracaso, este año el gobierno decidió cambiar de política aplicando un *subsidio* al precio del queso[5] y un *impuesto* a los otros bienes[6]. Estos impuestos y subsidios fueron calculados de tal forma que la antigua canasta óptima (sin ninguna política) pase por la recta de presupuesto nueva. Con esta política los consumidores efectivamente están consumiendo más queso y menos del otro bien.

(b) Dibuje esta nueva situación. ¿Podría afirmar que el individuo está mejor que antes (antes de aplicar ninguna política)?
(c) El gobierno piensa que con la política de *impuestos y subsidios* los consumidores están mejor que con la política de *cupones* porque están consumiendo más queso. ¿Es eso cierto?

11) Las preferencias de un individuo por canastas de bienes se representan por medio de la siguiente función de utilidad definida para tres bienes:

$$U(X,Y,Z)=XYZ$$

Dados los precios de los bienes Px, Py, Pz y el ingreso I.

(a) ¿Qué supuestos de las preferencias se cumplen para este consumidor? ¿Por qué? *(Ayuda: esta función de tres bienes es análoga a la Cobb-Douglas con dos bienes).*

(b) Obtenga las funciones de demanda marshallianas de los tres bienes y la función de utilidad indirecta.
(c) Obtenga la función de gasto y las demandas hicksianas para los tres bienes.
(d) Dibuje la curva de demanda ordinaria y la de Engel para el bien X ¿Qué tipo de bien es X? ¿Qué relación tiene con el bien Y? ¿Cómo es su elasticidad precio de la demanda?
(e) Suponga que Px=1, Py=1, Pz=1, I=30. Si el precio de X sube a 2, manteniéndose todo lo demás constante, encuentre el efecto sustitución y el efecto ingreso sobre X.

---

[5] Es decir, el precio del queso con subsidio sería Px – s, donde s es el subsidio por unidad.
[6] Para no complicar el problema suponga que sólo hay 2 bienes: X (queso) y otro bien Y cuyo precio después de aplicar el impuesto es Py +t.