

Notas de Microeconomía I
Universidad del Rosario

Andrés Zambrano José Alberto Guerra Ángela Sánchez

September 18, 2006

Contents

Introducción	ix
I Teoría del Consumidor	1
1 Nociones Primitivas	3
1.1 Mercancías y precios	4
1.2 Conjunto de consumo	5
1.3 Conjunto presupuestal (<i>restricción presupuestaria</i>)	7
1.3.1 Numerario	9
1.3.2 Variaciones de la recta presupuestaria	10
2 Preferencias y su Representación	15
2.1 Relaciones de preferencia	15
2.1.1 Axiomas de la teoría del consumidor	15
2.2 Representación de las Preferencias	20
2.3 Utilidad Marginal	22
2.4 Tasa Marginal de Sustitución	22
2.5 Elasticidad de Sustitución	24
2.6 Algunas funciones de utilidad	24
2.6.1 Preferencias Homotéticas	24
2.6.2 Preferencias Cuasilineales	30
2.6.3 Preferencias que no cumplen supuestos tradicionales	32
2.7 Extensiones	34
2.7.1 Preferencias especiales	34
3 Elección del Consumidor	37
3.1 Problema de Maximización de la Utilidad (<i>PMU</i>)	37
3.1.1 Planteamiento del problema y de su solución	38
3.1.2 Propiedades de la demanda marshalliana ($x^*(p, w)$)	45
3.1.3 Propiedades de la Utilidad Indirecta ($v(p, w)$)	47
3.2 Problema de Minimización del Gasto (<i>PMG</i>)	49

3.2.1	Planteamiento del problema y de su solución	49
3.2.2	Propiedades de la Demanda Hicksiana	53
3.2.3	Propiedades de la función de gasto	54
3.3	Dualidad	56
3.3.1	Función de Utilidad Indirecta y Función de Gasto Mínimo	57
3.3.2	Demanda Marshalliana y Demanda Hicksiana	58
3.3.3	Demanda Hicksiana y Función de Gasto	59
3.3.4	Demanda Marshalliana y la Función de Utilidad Indirecta	59
3.4	Extensiones	60
3.4.1	Efecto de los impuestos	60
3.4.2	Recuperación de las Preferencias	61
4	Funciones de Demanda	63
4.1	Demandas individuales	63
4.1.1	Demanda Marshalliana	63
4.1.2	Demanda Hicksiana	73
4.1.3	Ecuación de Slutsky	77
4.1.4	Medidas de bienestar	81
4.2	Demanda Agregada	91
4.2.1	Propiedades	92
4.2.2	Obtención de la demanda agregada	93
4.2.3	Tipos de curva de demanda	94
4.2.4	Desplazamientos de la curva de Demanda Agregada	94
4.2.5	Bienestar	96
5	Preferencia Revelada	99
5.1	El Axioma Débil de Preferencia Revelada	99
5.1.1	Ley de demanda compensada	103
5.1.2	Ecuación de Slutsky	105
5.1.3	Recuperación de preferencias a partir de la preferencia revelada	109
5.2	El axioma fuerte de la preferencia revelada	109
5.3	Extensión	110
5.3.1	Los números índices	110
6	Elección Intertemporal	113
6.1	Restricción presupuestaria intertemporal	113
6.1.1	Construcción	113
6.1.2	Inflación	115
6.1.3	Desplazamientos	116
6.2	Preferencia por el consumo intertemporal	117
6.3	La solución y estática comparativa	117

6.3.1	Preferencia revelada	118
6.3.2	Ecuación de Slutsky	119
7	Elección bajo incertidumbre	121
7.1	Teoría de la Utilidad Esperada	122
7.1.1	Preferencias entre loterías	122
7.1.2	Discusión sobre la teoría de la utilidad esperada	124
7.2	Loterías y Aversión al Riesgo	125
7.2.1	Cómo medir la aversión al riesgo	128
7.2.2	Información	128
II	Teoría del Productor	131
8	Producción	133
8.1	Conjuntos de producción	133
8.1.1	Propiedades de los conjuntos de producción	135
8.1.2	Definiciones	139
9	Maximización de los beneficios	143
9.1	El principio de Le Chatelier	147
9.2	Axioma débil de la maximización de beneficio	148
10	Problema de la minimización del costo	151
11	Maximización de beneficios a partir de la producción	155
11.1	Competencia Perfecta	155
11.2	Competencia Imperfecta	156
12	Dualidad Teoría del Productor	159
12.1	Recuperación de la Función de Producción.	160
12.1.1	Enfoque gráfico de la Dualidad:	162
13	La Geometría del Costo y de la Oferta en el caso de un solo producto	163
13.1	Diferencia entre el Corto y Largo Plazo	163
13.1.1	Largo Plazo	163
13.1.2	Corto Plazo	167
13.2	Relación entre el corto y el largo plazo	169

III	Equilibrio Parcial	175
14	Equilibrio Competitivo	177
14.1	El equilibrio en el corto plazo	179
14.2	El equilibrio en el largo plazo y con libre entrada	180
14.3	El control de los precios, los impuestos y cuotas de producción .	183
14.3.1	El control de precios	183
14.3.2	Los impuestos	185

Prefacio

La economía, como ciencia social, estudia las distintas interrelaciones que ocurren entre los agentes de una sociedad en el contexto de un mercado. Quizá la particularidad de esta ciencia, que la distingue de las otras ciencias sociales, son los instrumentos de los que se vale para lograr su objetivo: el uso formal de las matemáticas y la estadística. Sin embargo, esta ciencia no es autocontenida ni tampoco logra describir perfectamente la complejidad de estas interrelaciones. Es por esto que es necesaria la interdisciplinariedad de la economía con otras ciencias sociales y con las ciencias exactas. Esta interdisciplinariedad ha sido particularmente importante en los últimos años, prueba de esto es que varios de los últimos premios Nobel de Economía han sido científicos que han incursionado en esta ciencia a través de ciencias sociales como la psicología, o a través de ciencias exactas como la matemática y la estadística.

Dentro de la Economía, la Microeconomía es cada vez más importante en el desarrollo de la teoría. Lograr comprender el funcionamiento del mercado desde los agentes es cada vez más necesario para comprender los distintos problemas que se formulan en el ámbito macroeconómico.

En el mercado se consiguen una gran variedad de libros de Microeconomía, cada uno de ellos difieren en los enfoques, el nivel de profundización y en los temas que abordan. Mientras existen unos con un nivel avanzado de matemáticas y son el texto guía de maestrías y doctorados con un buen nivel, existen otros que dan las nociones de la microeconomía de una manera básica y no muy formal, que están diseñados para el pregrado. El propósito de este libro es crear un texto con un nivel intermedio dedicado únicamente a los temas del consumidor, productor y equilibrio parcial, temas que han sido reconocidos como los primeros al momento de enseñar la microeconomía. En principio, este libro ha sido diseñado como guía para los primeros cursos de Microeconomía en la Universidad del Rosario. Esperamos que éste sea de ayuda, se difunda y pueda ser usado por otras personas.

Ya que a lo largo del texto se quiere dar una formulación de la teoría con un grado de formalidad considerable, el libro se destaca porque en el texto principal se seguirá la descripción de la teoría teniendo en cuenta las interpretaciones de los conceptos y en los pies de página se hará énfasis en la descripción matemática de dichos conceptos y algunas demostraciones de los teoremas. Esto se hace con el fin de permitir hacer su lectura de acuerdo a las necesidades de quién lo utilice. De esta forma, se recomienda la lectura cuidadosa de los pies de página para

aquellos que lo requieran o bien porque sus preferencias los lleven a leerlos.

Introducción

Las notas se componen de un resumen comprensivo de los principales textos de Microeconomía seguidos por los programas de pregrado y posgrado de las principales universidades en todo el mundo. Este libro se concentra principalmente en la teoría neoclásica que es hasta ahora la más aceptada. Aunque esta teoría ha sido largamente criticada,¹ también es cierto que ha demostrado cierta solidez a lo largo del desarrollo de la teoría económica.

La teoría económica se caracteriza por imponer bastante estructura a los modelos, en otras palabras, se encarga de establecer un buen número de supuestos. Muchos de ellos no son ciertos en la realidad, sin embargo se hacen necesarios cuando queremos focalizar nuestra atención en una situación en particular. Si bien la exclusión de un supuesto irreal puede acercar más a la realidad el modelo, también es cierto que esta relajación del supuesto puede llevar a que este complique de forma innecesaria, es decir, puede que se lleguen a resultados similares pero utilizando herramientas mucho más sofisticadas, en este caso no tiene sentido excluir dicho supuesto. El problema de los supuestos se da cuando la exclusión pueda llevar a conclusiones significativamente distintas. Al respecto, Friedman sugirió que lo importante no era que la teoría reflejará todos los procesos que involucraba la elección; por el contrario, debería examinarse si los resultados que arroja la teoría son los mismos que suceden en la realidad. Por lo tanto, lo interesante será poder demostrar que el agente se comporta *como si* ("*as if*") cumpliera lo que dice la teoría.

Este libro continua con esta filosofía aunque desde una perspectiva crítica. Aquí se señalan las distintas críticas que se han hecho a la teoría y algunas de las extensiones que se han hecho con el fin de corregir algunas de las diferencias entre la teoría y la realidad y volverla más útil. El texto se divide en tres secciones: teoría del consumidor, teoría del productor y equilibrio parcial. La primera sección estudia el comportamiento del consumidor y los procesos que lleva a cabo para realizar su elección. La segunda sección se centra en el comportamiento de las firmas y los distintos problemas que debe solucionar. La última sección muestra cómo interactúan el consumidor y el productor en el mercado desde la perspectiva del equilibrio parcial.

¹ Ver por ejemplo corrientes heterodoxas como el institucionalismo y el evolucionismo.

Part I

Teoría del Consumidor

Chapter 1

Nociones Primitivas

"Often, you will notice we make certain assumptions purely for the sake of mathematical expediency. The justification for proceeding this way is simple, and it is the same in every other branch science. These abstractions from "reality" allow us to bring to bear powerful mathematical methods that, by the rigor of the logical discipline they impose, help extend our insights into areas beyond the reach of our intuition and experience" Jehle y Reny (2001)

(Resumen de: Cap. 1 Jehle y Reny, Cap. 2 MWG, Cap. 2 Varian, Economía Intermedia, Cap. 2 Debreu)

La teoría del consumidor neoclásica describe el comportamiento de los individuos teniendo en cuenta que éste se encuentra en una economía de mercado, es decir, en un escenario donde los bienes y servicios que un consumidor adquiere están disponibles para la compra. De esta forma, el problema de un consumidor puede resumirse como la elección de varios bienes y servicios que están disponibles en el mercado. Es por eso que antes de comenzar debemos definir estos bienes y servicios, los cuales se llamarán mercancías, y a cada una de ellas le asociaremos un precio. La elección de varias mercancías la llamaremos canasta.

Ahora bien, no todos tenemos acceso a toda clase de mercancías o incluso podemos tener un acceso limitado solo a determinadas cantidades de estas. Teniendo en cuenta este hecho se definirá entonces el conjunto de consumo, definido este como la colección de canastas que la persona realmente puede alcanzar.¹ Posteriormente introduciremos la noción de conjunto presupuestal como todas las canastas que la persona puede comprar dada su riqueza. A continuación, se hablará del conjunto de posibilidades de consumo que resulta de intersectar el conjunto de consumo con la restricción presupuestal. Las canastas que se encuentran en este conjunto serán nuestro centro de atención ya que el problema que debe resolver el consumidor, desde el punto de vista de la microeconomía, es escoger la canasta que se encuentre en este conjunto que más

¹Note que esto no tiene nada que ver con la riqueza del individuo.

le satisfaga. Por último, nos concentraremos en describir las posibles variaciones del conjunto presupuestal debido a cambios en precios, ingreso o la existencia de impuestos o subsidios.

1.1 Mercancías y precios

Para la definición de estos conceptos primero debemos definir un número finito de intervalos de tiempo que deben estar numerados en orden cronológico de tal forma que el presente sea el primer periodo. De una forma similar, el espacio debe estar subdividido en un número finito de regiones (lugares). Los bienes y servicios, distinguidos según sus características físicas, tiempo y lugar, se llamarán mercancías. Por ejemplo, una barca de madera en una costa es una mercancía distinta a una barca de madera en el desierto. Más aún, una bufanda gris en París en verano es distinta a la bufanda gris en París en invierno.²

Por simplicidad se asumirá que el número de mercancías es finita e igual a L , indexados según $\ell = 1, \dots, L$. La cantidad de una mercancía se expresa mediante un número real.³ Una canasta de mercancías (o acción) puede ser expresada mediante el vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_L)$ que pertenece a R^L y será una lista de los montos de las distintas mercancías, donde x_ℓ es la cantidad del bien ℓ que piensa adquirir. A R^L se le llamará espacio de mercancías.

Example 1 *Suponga que en un mercado existe 4 mercancías: panes de la panadería del barrio hecho el día de hoy, panes de la panadería del barrio hecho ayer en la tarde, balones de fútbol nuevos marca Golty y botellas de agua de 500 ml. De esta forma, el espacio de mercancías está representado por R^4 . Así, el punto $x = (2, 2, 1, 0) \in R^4$ indica una canasta que contiene dos panes de la panadería del barrio hecho el día de hoy, dos panes de la panadería del barrio hecho ayer en la tarde, un balón de fútbol nuevo marca Golty y ninguna botella de agua de 500 ml.*

Por simplicidad y mejor entendimiento, usualmente el análisis se realizará para dos bienes, i.e $L = 2$ (por tanto una canasta será un punto en el espacio R^2). Aun cuando se pierde información, esto puede resultar útil cuando se quiere analizar el comportamiento de una mercancía ya que las demás se pueden agregar como una única mercancía. Por ejemplo, si se quiere analizar en detalle la demanda de balones de fútbol nuevos marca Golty, vale la pena trabajar con esta mercancía y otra que agregue todas las otras mercancías que existan en el mercado.

²Como lo sugiere Debreu "la descripción temporal y espacial es un tema central en economía. El estudio de los cambios en las fechas lleva a las teorías del interés, ahorro, inversión y capital, conocido también como finanzas. El estudio de los cambios en el espacio tiene que ver con las teorías espacial, de transporte, comercio internacional e intercambio".

³Normalmente se asume que estas cantidades son no negativas. Sin embargo, en algunos casos, es usual utilizar números negativos para denotar insumos.

⁴Recuerde que $R = \{x : -\infty < x < \infty\}$, por tanto $R^2 = R \times R = \{(x_1, x_2) : x_1 \in R, x_2 \in R\}$ y $R^L = \{(x_1, x_2, \dots, x_L) : x_1 \in R, x_2 \in R, \dots, x_L \in R\}$.

Para cada mercancía, digamos h , se asocia un número real, su precio p_h . Este puede ser interpretado como la cantidad pagada *hoy* por un agente por cada unidad de la mercancía h que le será entregada. Así, un vector de precios es una l -tupla $p = (p_1, p_2, \dots, p_L)$, que también pertenece a R^L .⁵ Estos precios pueden ser los normalmente conocidos pero también pueden ser salarios, rentas, etc. Note que un mismo bien puede tener distintos precios según el tiempo y el lugar donde esté definido. En el área de las finanzas, el mercado de futuros muestra el precio de distintos bienes que estarán disponibles en el futuro. Por ejemplo, un saco de café puede tener un valor distinto si está disponible hoy o si está disponible en algún momento del futuro.

Los precios pueden ser positivos (mercancías escasas), nulos (mercancías libres como el aire) o negativos (mercancías nocivas conocidas también como males, e.g. basura). El hecho de que estos precios sean positivos, nulos o negativos no es una propiedad intrínseca de la mercancía; depende del gusto de los agentes, de la tecnología, los recursos, etc. Por ejemplo, durante mucho tiempo, la materia fecal era considerada nociva y la gente pagaba para que esta fuera retirada (precio negativo); sin embargo, debido a nuevas tecnologías, esta puede utilizarse como abono para plantas de tal forma que en algunas partes se paga un precio positivo por esta.

El valor de una canasta es la cantidad de dinero que un individuo debe pagar en el mercado para adquirir dicha canasta. Dadas las anteriores definiciones, podemos calcular el valor de una canasta mediante el producto interno $p \cdot x$, es decir, $\sum_{l=1}^L p_l x_l$.

Example 2 *Continuando el ejemplo anterior, suponga que el vector de precios de este mercado es $p = (2, 1, 5, 1)$. Note que el pan viejo vale la mitad que lo que vale el pan nuevo e igual que la botella de agua. Si el individuo quiere comparar la canasta antes mencionada, $x = (2, 2, 1, 0)$, deberá pagar $p \cdot x = 2 * 2 + 1 * 2 + 5 * 1 + 1 * 0 = 11$.*

1.2 Conjunto de consumo

El conjunto de consumo de un individuo está compuesto por todas las canastas que son posibles de adquirir en el mercado, de tal forma que puede estar limitado por restricciones físicas. El ejemplo más simple es que a un consumidor le sería imposible consumir cantidades negativas de pan o de agua. Así, el conjunto de consumo X puede definirse como un subconjunto del espacio de mercancías, $X \subset R^L$, siendo L el número de bienes en la economía. Sus elementos son las canastas de consumo que un individuo puede consumir dadas las restricciones físicas impuestas por su ambiente. Por ejemplo, si $L = 2$, (véase 1.1, *la siguiente gráfica es tomada de MWG (1995)*) siendo los bienes carne y ocio en un día, se tendría que ambos bienes deben ser positivos pero además que el consumo de ocio en un día no puede superar las 24 horas (*véase la siguiente figura*). De

⁵Es por esto que en economía matemática se dice que el espacio de precios es un espacio dual al espacio de mercancías.

igual manera, el conjunto de consumo entre pan en Bogotá o pan en Cali será como se muestra en la gráfica: existe una imposibilidad de comer un pan en Cali mientras se está en Bogotá. La siguiente gráfica plantea el problema cuando el consumidor requiere un mínimo de consumo de agua y de pan para sobrevivir. La última de las gráficas muestra cuando uno de los bienes es perfectamente divisible (x_2) y el otro (*balones*) únicamente puede ser consumido en cantidades enteras positivas.

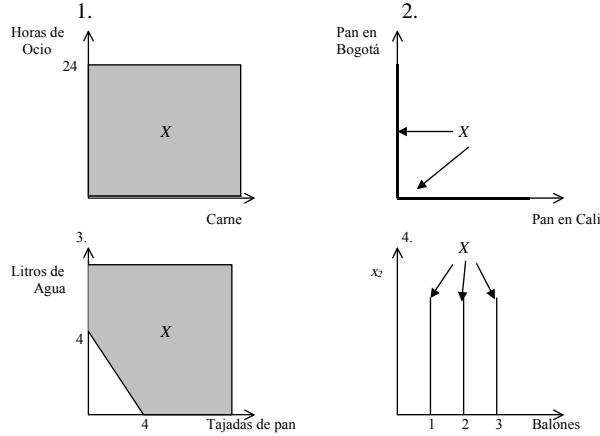


Figure 1.1: Conjuntos de consumo

Además de las restricciones físicas que pueden darse, existen algunas restricciones que se deben a legislaciones, como por ejemplo una jornada laboral máxima, u otras cuestiones.

Por ahora, la única restricción que vamos a imponer es que las cantidades sean no negativas, de esta forma se define

$$X = R_+^L = \{x \in R^L : x_l \geq 0 \text{ para } l = 1, \dots, L\},$$

Este conjunto se caracteriza por tener las siguientes propiedades:

1. $\emptyset \neq X \subseteq R_+^L$
2. X es cerrado⁶

⁶Existen varias definiciones de un conjunto cerrado. Una de ellas es que A se dice cerrado si contiene sus puntos de acumulación. Usualmente el conjunto de puntos de acumulación es denotado por A' . Se dice que $x \in A'$ si existe una sucesión $\{x_n\} \subset A$ tal que $x_n \rightarrow x$. Esta definición es equivalente a que si hacemos una bola de cualquier tamaño alrededor de x , en esa bola siempre existirán puntos de A .

Cuidado, que un conjunto no sea cerrado, no significa que este sea abierto. Existen conjuntos que son cerrados y abiertos al mismo tiempo y conjuntos que no son cerrados ni abiertos. De hecho, los conjuntos que no tienen límites son abiertos y cerrados, por ejemplo R . Los conjuntos que tienen varios límites y algunos de estos hacen parte del conjunto mientras que otros no, no son abiertos ni cerrados, por ejemplo $[5, 10)$.

1.3. CONJUNTO PRESUPUESTAL (RESTRICCIÓN PRESUPUESTARIA)⁷

3. X es convexo⁷

4. $0 \in X$ ⁸

La primera propiedad, que el conjunto sea no vacío, nos dice que el conjunto de consumo debe tener por lo menos una canasta. La siguiente propiedad exige que el conjunto contenga sus límites, si los tiene. La tercera propiedad indica que si dos canastas se encuentran en el conjunto, la combinación entre ellas también va a estar allí. La última propiedad permite que el consumidor tome la decisión de no consumir nada.⁹

La gráfica 1.1 y la gráfica 1.3 son conjuntos convexos, mientras que la 1.2 y la 1.4 no lo son. Si modificáramos la gráfica 1.1 al imponer la restricción de que es obligatorio tomar algo de ocio en el día de tal forma que no fuera posible escoger un punto a lo largo del eje x donde las cantidades de ocio son cero, estaríamos frente a un conjunto de consumo abierto, pues no contendría dicho límite.

1.3 Conjunto presupuestal (*restricción presupuestaria*)

Además de las restricciones físicas anteriormente mencionadas se encuentran las restricciones económicas del consumidor, su consumo está limitado por aquellas canastas de consumo que el individuo puede comprar. Se supone que los precios de las L mercancías son conocidos por todos los agentes del mercado; de igual manera se asumirá que el vector de precios es estrictamente positivo, esto es $p = (p_1, \dots, p_l) \gg 0$. También se supone que los consumidores no influyen en los precios, es decir se comportan como *precio aceptantes*. Este supuesto es válido cuando la demanda del consumidor por cualquier bien representa sólo una pequeña fracción de la demanda total del bien.

De esta forma, una canasta de consumo depende de dos cosas: los precios del mercado p , y el nivel de riqueza del individuo w . Por lo tanto se define el conjunto presupuestal (o walrasiano) como $B_{p,w} = \{x \in R_+^L : p \cdot x \leq w\}$. Esto significa que la canasta se podrá comprar si su costo no excede su riqueza

⁷Un conjunto X se dice convexo si para todo $x, x' \in X$ entonces $x'' = ax + (1-a)x' \in X$ para cualquier $a \in [0, 1]$. En este caso, x'' se conoce como la combinación convexa entre x y x' .

Note que x'' representa a todos los puntos de la línea que une a x y x' . Entre más se acerque a a 1, más se acerca x'' a x ; y entre más se acerque a 0, más se acerca a x' . Para verlo claramente tome $x = (8, 4)$ y $x' = (4, 8)$. Cuando $a = 1$, $x'' = x$. Si $a = 0$, $x'' = x'$. Cuando $a = 1/2$, $x'' = (6, 6)$, justo en la mitad de los dos puntos. Si $a = 1/4$, $x'' = (5, 7)$, más cerca de x' . Y si $a = 3/4$, $x'' = (7, 5)$, más cerca de x .

Así, que un conjunto sea convexo implica que la línea que une a dos puntos cualesquiera de ese conjunto, debe estar totalmente dentro dicho conjunto.

⁸Note que el cumplimiento de esta propiedad lleva a que el conjunto sea no vacío (primera propiedad).

⁹Para que un conjunto sea de consumo no necesariamente debe cumplir las anteriores propiedades. Como se vió, los conjuntos de consumo tienen formas diversas.

(ingreso). Note que este conjunto también cumple las propiedades mencionadas anteriormente para el conjunto de consumo.

La intersección entre el conjunto de consumo y el conjunto presupuestal se denominará el conjunto de posibilidades de consumo. Este conjunto estará compuesto por todas las canastas que el individuo encuentre disponibles en el mercado y que pueda comprar. Si suponemos que el conjunto de consumo es el ortante positivo, como se definió antes, entonces el conjunto de posibilidades de consumo es el mismo conjunto presupuestario. Así, el problema del consumidor puede ser establecido como **escoger una canasta de consumo x de $B_{p,w}$** .¹⁰

Para el caso de dos bienes (el cual, como ya se mencionó anteriormente, demandará gran parte de nuestro curso por facilidad) si se observan los precios (p_1, p_2) y la cantidad de dinero que el consumidor tiene para gastar w , la **restricción presupuestaria o conjunto presupuestario** será

$$p_1x_1 + p_2x_2 \leq w$$

siendo p_1x_1 la cantidad de dinero que el consumidor gasta en el bien 1, y p_2x_2 la cantidad de dinero que gasta en el bien 2, y por tanto la expresión anterior nos está diciendo que lo que el consumidor gasta en el consumo de los dos bienes no puede superar su riqueza inicial. Por último se entenderá como **recta presupuestaria** todas aquellas cestas que cuestan exactamente w :

$$p_1x_1 + p_2x_2 = w$$

La figura 3 representa lo anterior.

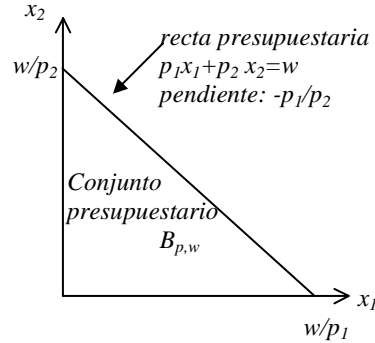


Figure 1.2: Recta presupuestaria

Esta ecuación puede reexpresarse como $x_2 = \frac{w}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1$, si el individuo gastara toda su renta en el bien 1 su consumo sería $x_1 = \frac{w}{p_1}$, por tanto los

¹⁰Cuidado, este problema puede no tener solución si dicha intersección entre el conjunto de consumo y el conjunto presupuestal no existe.

1.3. CONJUNTO PRESUPUESTAL (RESTRICCIÓN PRESUPUESTARIA)9

cortes con los ejes representa la cantidad de cada bien si el individuo decidiera gastar todo su ingreso en comprar sólo uno de los bienes.

La pendiente de esta recta es $-p_1/p_2$ lo que indica cuántas unidades del bien 2 necesita consumir el individuo para satisfacer exactamente la restricción presupuestal si reduce su consumo del bien 1 en una unidad, es decir, mide la relación en la que el mercado está dispuesto a sustituir el bien 2 por el bien 1. En términos matemáticos, para derivar esta relación hay que preguntarse si el consumidor va a aumentar el consumo del bien 1 en Δx_1 ¿en cuánto deberá modificar el consumo del bien 2 (Δx_2) para satisfacer su restricción presupuestal?

Para resolverlo se toma la restricción presupuestal

$$p_1x_1 + p_2x_2 = w$$

luego se le suman las variaciones en el consumo de cada bien

$$p_1(x_1 + \Delta x_1) + p_2(x_2 + \Delta x_2) = w$$

luego se restan las ecuaciones anteriores y se tiene que

$$p_1 \Delta x_1 + p_2 \Delta x_2 = 0$$

Esto nos dice que el valor total de la variación de su consumo debe ser cero pues no hay un cambio en el ingreso. Después se halla la pendiente

$$\Delta x_2 / \Delta x_1 = -p_1/p_2$$

que es la relación a la que puede sustituirse el bien 2 por el 1 satisfaciendo al mismo tiempo la restricción presupuestaria. La pendiente de la recta presupuestaria tiene signo negativo ya que si se desea consumir una mayor cantidad del bien 1 tiene que consumirse una cantidad menor del bien 2. Esto puede entenderse como el *costo de oportunidad* de consumir el bien 1.

Example 3 *Supongamos que solo tenemos pan viejo, cuyo precio es 1, y pan nuevo, cuyo precio es 2. Ahora suponga que el ingreso es de 10. De esta forma, todas las canastas de pan viejo y nuevo que puede comprar esta dada por la ecuación $x_1 + 2x_2 \leq 10$, donde x_1 es pan viejo y x_2 es pan nuevo. Así, lo máximo que puede comprar de pan viejo son 10 unidades, mientras la cantidad máxima que puede comprar de pan nuevo son 5 unidades.*

1.3.1 Numerario

Teniendo en cuenta lo anterior, suponga que multiplicamos todos los precios y el ingreso por la constante $s = 1/p_2$. Así que la ecuación de la recta presupuestal la podemos ver como $\frac{p_1}{p_2}x_1 + x_2 = \frac{w}{p_2}$. Esto puede ser interpretado como que el precio del segundo bien es uno mientras el precio del primer bien es p_1/p_2 ¹¹ y su

¹¹Esto puede ser interpretado como el precio relativo del primer bien con respecto al precio del segundo bien.

ingreso w/p_2 . Como se dijo anteriormente, esta será la misma recta presupuestaria a la que se tenía antes de multiplicar por la constante s . Esto significa que el consumidor solo se fijará en los precios relativos y uno en los absolutos. Este hecho permitirá que siempre podamos igualar el precio de un bien a uno sin perder generalidad en el problema, esto puede llegar a ser útil porque desaparece un precio y tendremos una variable menos de que preocuparnos. Cuando el precio de determinado sea igualado a uno este bien se denominará numerario.

1.3.2 Variaciones de la recta presupuestaria

Como vimos, la recta presupuestal depende de los precios y de la riqueza del individuo, y estos a su vez pueden estar afectados por la existencia de impuestos o subsidios. Si estos parámetros cambian entonces el conjunto presupuestal también debe ser modificado. En esta sección mostraremos las distintas variaciones del conjunto presupuestal.

Variaciones de la renta

Supongamos primero que existe un incremento en la renta percibida del consumidor, $w' > w$. Esto lleva a que exista un desplazamiento **paralelo** hacia afuera de la recta como se muestra en la figura 1.3 e implica que el corte de los ejes sea más lejano al origen, $w'/p_i > w/p_i$ para $i = 1, 2$. Este desplazamiento hace que el nuevo conjunto presupuestal contenga el anterior conjunto presupuestal, $B_{p,w} \subset B_{p,w'}$, es decir, el individuo podrá comprar las mismas canastas de antes e incluso unas con cantidades mayores. Si por el contrario existe una disminución de la riqueza, la recta se desplazará paralelamente hacia adentro. Note que los desplazamientos son paralelos porque la pendiente de la recta presupuestal se mantiene constante ya que esta no depende de la riqueza, está depende únicamente de los precios y estos no han sido modificados.

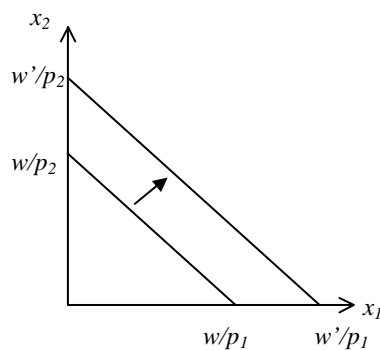


Figure 1.3: Variación de la recta presupuestaria ante un aumento en el ingreso

Variaciones del precio de un bien

Supongamos que el precio del bien 1 aumenta, $p'_1 > p_1$, esto lleva a que exista una rotación de la recta hacia adentro como lo muestra la figura 1.4. Esto hace que el nuevo conjunto presupuestal este contenido en el anterior conjunto, $B_{p',w} \subset B_{p,w}$, es decir que el individuo ya no puede comprar algunas canastas que antes sí podía comprar. Note que cambia tanto el corte en el eje x_1 porque el precio del bien 2 no ha sido modificado, como la pendiente de la recta que se vuelve más acostada. El análisis es análogo si cambiara el precio del bien 2.

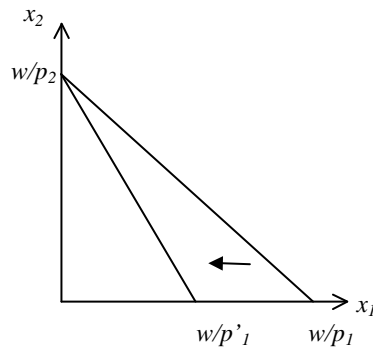


Figure 1.4: Variación de la recta presupuestaria ante un aumento de p_1

Multiplicar ambos precios por una misma cantidad equivale a dividir la renta por esa misma cantidad (*si se multiplica tanto los precios como la renta por una constante t la recta presupuestaria no varía*).

$$tp_1x_1 + tp_2x_2 = w \text{ es lo mismo que } p_1x_1 + p_2x_2 = w/t$$

Variaciones simultáneas de precios y renta

También es posible que existan cambios simultáneos en estas variables, puede pasar que cambien solo los precios o que haya un cambio de los precios y de la riqueza al mismo tiempo. En el caso en que cambien solo los precios si p_2 sube más que p_1 se da que $-p_1/p_2$ disminuye en valor absoluto y la recta presupuestal se tornará más horizontal. En el caso contrario, la pendiente se volverá más vertical. Si los dos precios cambian en la misma proporción, digamos λ , la pendiente permanecerá inmóvil pero se provocará un desplazamiento de la recta hacia adentro si $\lambda > 1$, en cuyo caso equivale a una disminución del ingreso, o hacia afuera si $0 < \lambda < 1$, lo cual equivaldría a un aumento del ingreso. Para ver esto note que la nueva restricción presupuestaria puede escribirse como $\lambda p_1x_1 + \lambda p_2x_2 = w$, que es lo mismo que $p_1x_1 + p_2x_2 = w/\lambda$, donde $w/\lambda < w$ si $\lambda > 1$ o $w/\lambda > w$ si $0 < \lambda < 1$. Note que la nueva pendiente es $-\lambda p_1/\lambda p_2 = -p_1/p_2$ y los cortes $w/\lambda p_1$ y $w/\lambda p_2$, estos últimos también varían dependiendo de la magnitud de λ .

En el caso en que w disminuye y p_1 y p_2 aumentan, disminuirán los puntos de corte en los ejes (ya que varían w/p_1 y w/p_2), entonces hay un desplazamiento hacia adentro de la recta. Note también que si los precios y el ingreso aumentan en la misma proporción la recta presupuestaria permanecerá igual ya que tendríamos que $\lambda p_1 x_1 + \lambda p_2 x_2 = \lambda w$ que es lo mismo que $p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$. La interpretación de esta hecho puede ser si existe una inflación perfectamente equilibrada en la que todos los precios y todas las rentas varían en una misma tasa, el conjunto presupuestario de las personas no se verá alterado y por tanto no puede afectar la decisión óptima de nadie.

Existencia de impuestos, subvenciones o racionamiento

Muchas veces la economía política necesita de la utilización de impuestos y subsidios para lograr algunos propósitos. La existencia de estos impuestos afecta algunas variables económicas y una de estas es la restricción presupuestal. Existen distintos tipos de impuestos y subsidios:

1. Impuesto de suma fija: el Estado se lleva una cantidad fija (T) de dinero independientemente de la conducta que lleve el consumidor, la recta presupuestal se desplaza paralelamente hacia adentro ya que la renta será $w - T$, así que corresponde a una disminución del ingreso. En el caso de un *subsidio de suma fija* el estado le entrega al individuo una suma fija de dinero.
2. Impuesto sobre la cantidad: el consumidor tiene que pagar por cada unidad que compra de ese bien. Este impuesto es exactamente lo mismo que un precio más alto. Supongamos que un impuesto t se cobrará sobre cada unidad del bien 1, la nueva recta presupuestaria del individuo será $(p_1 + t)x_1 + p_2 x_2 = w$ lo que implica que su pendiente sea más inclinada. Así, el estado recaudará tx_1 . En el caso de una *subvención o subsidio a la cantidad* el Estado le da al consumidor una cantidad de dinero por cada unidad que compre del bien. Esto puede verse como una disminución del precio de tal forma que la nueva recta presupuestal será $(p_1 - s)x_1 + p_2 x_2 = w$.
3. Impuesto sobre el valor o ad valorem: es un impuesto sobre el precio del bien y no sobre la cantidad que se compra de él (e.g IVA). Si el bien 1 tiene un precio de p_1 y está sujeto a un impuesto sobre las ventas cuyo monto es τ ¹² el precio real que tiene que pagar el consumidor será $(1 + \tau)p_1$. El Estado obtendrá τp_1 . En el caso de un *subsidio o subvención ad valorem* el Estado da el subsidio según el precio del bien que se quiere subvencionar, $(1 - \sigma)p_1$.
4. Racionamiento: consiste en establecer la cantidad máxima que puede consumir el individuo. Por ejemplo suponga que se impide el consumo de x_1 mayor que un cierto nivel x'_1 , la recta presupuestaria será como en la figura 1.5

¹²Note que este debe ser un porcentaje.

1.3. CONJUNTO PRESUPUESTAL (RESTRICCIÓN PRESUPUESTARIA)¹³

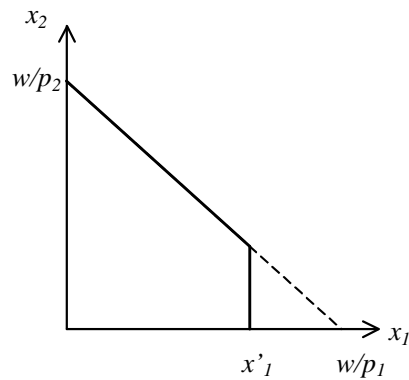


Figure 1.5: Cambio en la recta presupuestaria ante racionamiento

Muchas veces el racionamiento puede utilizarse simultáneamente con impuestos al consumo, por ejemplo cuando un consumidor sólo debe pagar un impuesto sobre el consumo del bien 1 si éste es superior a x'_1 , y por tanto la curva presupuestaria se torna más inclinada a la derecha de ese punto tal como se muestra en la figura 1.6.

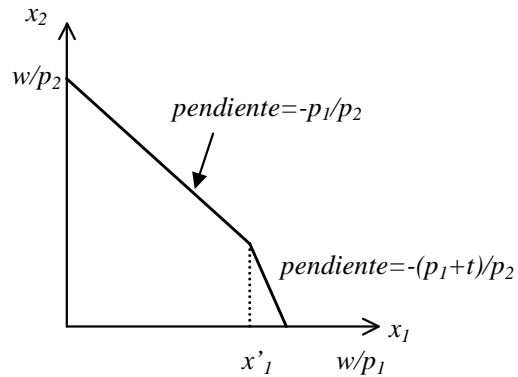


Figure 1.6: Racionamiento con impuestos de consumo

Example 4 (Tomado de MWG) *En la vida real la restricción presupuestal de un individuo puede distar un poco de la forma simplificada anterior, por ejemplo si se está contemplando el intercambio de mercado entre un bien de consumo (x_2) y el ocio (x_1) Asumiendo que el precio del bien de consumo es 1 ($p_2 = 1$) y que el consumidor gana un salario s ¹³ por hora que trabaje durante las primeras*

¹³Note que la interpretación del salario es como el precio de consumir una hora adicional

8 horas, y obtendrá un salario s' por horas adicionales (donde $s' > s$). De igual forma se enfrenta a una tasa de impuesto t por peso sobre el ingreso laboral ganado arriba del monto M . Por tanto la restricción presupuestal de este individuo será como se muestra a continuación (figura 1.7).

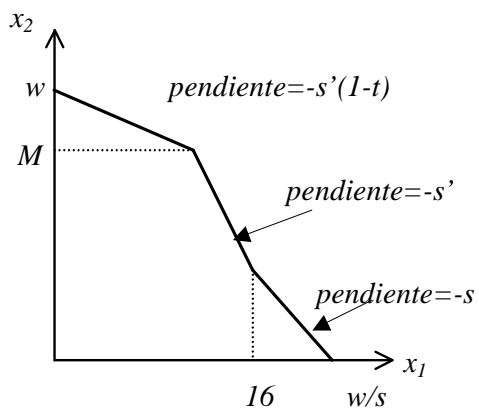


Figure 1.7: Una recta presupuestal más real

de ocio (recuerde que el ocio es visto como un bien)

Chapter 2

Preferencias y su Representación

(Resumen de: Cap. 1 MWG Cap. 3 Varian, *Economía Intermedia*,
Cap. 3 Nicholson,)

Una parte importante de la economía es aquella que intenta modelar la actividad económica como una interacción de los agentes individuales económicos que van tras un interés privado. Inicialmente se harán algunas consideraciones partiendo desde un esquema abstracto, el objetivo principal será el de desarrollar la teoría de la decisión. Esta teoría tiene dos enfoques: el enfoque basado en preferencias y el enfoque basado en elección¹. El primero de ellos, y más tradicional, asume que el individuo tiene relaciones de preferencia sobre el conjunto de posibles elecciones que satisfacen axiomas de racionalidad. El segundo gira en torno a las decisiones que el individuo ha tomado y así desarrollar la estructura de elección de cada individuo². Como veremos después, ambos enfoques nos llevarán a conclusiones similares. En este capítulo nos concentraremos en el primer enfoque.

2.1 Relaciones de preferencia

2.1.1 Axiomas de la teoría del consumidor

En este enfoque (el **enfoque basado en las preferencias**) las relaciones de preferencia se asumen como las características primitivas de los individuos. La teoría se expone inicialmente suponiendo los axiomas de racionalidad acerca

¹Para una exposición más detallada de lo que a continuación se presentará véase **Ritchr (1971) "Rational choice, -cap. 2 in preferences, utility and demand"**

²Este enfoque es más conocido como el enfoque de la preferencia revelada, posteriormente (en las sesiones 9 y 10) se profundizará en este tema

de la elección de los consumidores y luego se analizan las consecuencias de estas preferencias para el comportamiento (las decisiones que ellos hacen). Este enfoque es el más tradicional pero hace los supuestos sobre objetos que no son observables como lo son las *preferencias*.

El punto de partida es un conjunto de alternativas posibles, denotado por X . Este conjunto puede ser el mismo conjunto de consumo, que es el caso en el que nos concentraremos, pero también pueden ser decisiones como qué carrera estudiar. Los gustos del individuo están resumidos por una *relación de preferencia* que se denota por \succsim . Esta es una relación binaria en el conjunto de alternativas X que permite la comparación de un par de alternativas $x, y \in X$. Si se tiene $x \succsim y$ se leerá *x es al menos tan bueno como y*. Partiendo de esto se pueden establecer las siguientes relaciones

- relación de preferencia estricta \succ : $x \succ y \Leftrightarrow x \succsim y$ pero no $y \succsim x$; y se lee *x es estrictamente preferido a y*
- relación de indiferencia \sim : $x \sim y \Leftrightarrow x \succsim y$ y $y \succsim x$; y se lee *x es indiferente a y*

En la teoría económica se asume que las preferencias de los individuos son *racionales*

Definition 5 *La relación de preferencia \succsim es racional si posee las siguientes dos propiedades:*

completitud: *para todo $x, y \in X$ se tiene $x \succsim y$ o $y \succsim x$ (o ambos). Dice que un individuo tiene una preferencia bien definida entre dos posibles alternativas.*

transitividad: *para todo $x, y, z \in X$, si $x \succsim y$ y $y \succsim z$ entonces $x \succsim z$.*

Algunos autores incluyen otra propiedad llamada reflexividad, esta supone que cualquier cesta es al menos tan buena como ella misma $x \succsim x$. Sin embargo no se menciona en la definición porque puede derivarse de la completitud. Todas estas propiedades han sido criticadas a lo largo del desarrollo de la microeconomía a través de la economía experimental principalmente.³ Sin embargo, también se ha mostrado que sin estos supuestos pueden llegarse a conclusiones

³Por un lado, la completitud no siempre se cumple ya que dicho proceso de introspección revela lo difícil que es evaluar alternativas que están lejos de la experiencia común. Por ejemplo, ¿prefiere usted el *Guriltai Shul* o el *Khorkhog*? Ambos son platos tradicionales de la cocina mongola que nosotros, los autores, tampoco hemos probado. Solamente son citados para demostrar la debilidad de la completitud. La reflexividad también presenta problemas empíricos. Para la conducta de los adultos este supuesto puede parecer válido, sin embargo se ha encontrado que el supuesto no puede mantenerse para la conducta de niños pequeños.

Por su parte, la segunda propiedad puede ser refutada por varias razones. Una de ellas es la de *diferencias apenas perceptibles o no perceptibles*. Por ejemplo, si se pone a un individuo a escoger entre una taza de azúcar y otra con la misma cantidad de azúcar más un grano adicional muy probablemente a éste individuo le sea indiferente una taza o la otra, si así se siguiese el ejercicio, enfrentando distintos pares de tazas cuya única diferencia radica en un grano más, la relación que dominaría sería la de indiferencia. Pero, si al final se enfrenta la primera taza con aquella que tiene mil granos más de azúcar, la diferencia será perceptible y la preferencia del individuo será estricta.

Otra inconsistencia puede surgir cuando un comportamiento intransitivo puede ser explicado

similares, por ejemplo mediante la preferencia revelada, lo que mostraría su validez.

Partiendo de la definición de racionalidad de \succsim puede establecerse la siguiente proposición que obtiene propiedades para \succ y \sim .

Proposition 6 *Si \succsim es racional entonces*

1. \succ es irreflexiva ($x \succ x$ nunca se mantiene), y transitiva (si $x \succ y$ y $y \succ z$, entonces $x \succ z$)
2. \sim es reflexiva ($x \sim x$ se mantiene para todo x), transitiva (si $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces $x \sim z$) y simétrica (si $x \sim y$, entonces $y \sim x$)
3. si $x \succ y \succsim z$ entonces $x \succ z$.⁴

De acuerdo a esto, algunas (no todas, ya veremos porqué) preferencias racionales pueden representarse gráficamente mediante **curvas de indiferencia**. Así, dada la relación de preferencias \succsim y una canasta de consumo x , pueden definirse tres conjuntos de canastas de consumo (véase la figura 2.1)

1. El *conjunto de indiferencia (curva de indiferencia)*: es el conjunto de todas las canastas que son indiferentes a x ; $\{y \in X : y \sim x\}$
2. El *conjunto contorno superior o conjunto preferido débilmente*: es el conjunto de todas las cestas que son al menos tan buenas como x ; $\{y \in X : y \succsim x\}$
3. El *conjunto contorno inferior*: es el conjunto de todas las cestas para las cuales x es al menos tan buenas como ellas mismas; $\{y \in X : x \succsim y\}$

como el resultado de varios comportamientos racionales. La paradoja de Condorcet es un ejemplo de ello. Supongamos que se tienen tres alternativas $\{x, y, z\}$ y tres agentes cuyas preferencias están dadas por

$$\begin{aligned} x &\succ_1 y \succ_1 z \\ y &\succ_2 z \succ_2 x \\ z &\succ_3 x \succ_3 y \end{aligned}$$

si se tomará la elección social de acuerdo al voto por mayoría se tendría que $x \succ y$ pero a la vez que $y \succ z$ y también que $z \succ x$, obteniendo $x \succ y \succ z \succ x \dots$

Otro posible inconveniente de esta propiedad se da cuando la manera en que las alternativas son presentadas importan a la hora de hacer la elección, esto es conocido como el *problema de la proposición o del recuadro* (Kahneman y Tversky, 1984). Algunas decisiones intransitivas también pueden darse cuando existen cambios en los gustos de los individuos, este *cambio en los gustos* tienen importantes alcances en el análisis de conductas adictivas (Schelling, 1979). El punto de vista del *cambio de gustos* otorga una estructura muy bien definida para pensar en decisiones *no racionales* (Elster, 1979 y 2000).

Proposition 7 Proof. 1. *Irreflexividad: si $x \succ x \implies x \succsim x$ pero no $x \succ x$ (violando completitud)*

Transitividad: si $x \succ y \implies x \succsim y$ pero no $y \succ x$. Si $y \succ z \implies y \succsim z$ pero no $z \succ y$. Por lo tanto $x \succ z$ pero no $z \succ x \implies x \succ z$

2. *Ejercicio*

3. *Ejercicio* ■

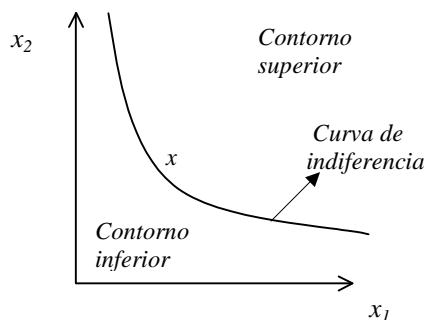


Figure 2.1: Conjuntos de canastas de consumo: conjunto de indiferencia, contorno superior e inferior

Debe aclararse que **las curvas de indiferencia que representan distintos niveles de preferencias no pueden cortarse**. La demostración a lo anterior es sencilla. Note que $x \sim z$ y que $z \sim y$, por transitividad debería cumplirse que $x \sim y$ lo cual obviamente se viola si estamos hablando de dos curvas de indiferencia que representan niveles distintos de preferencia (véase figura 2.2).

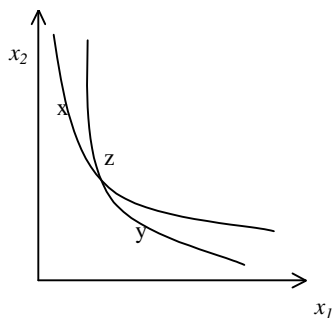


Figure 2.2: Las curvas de indiferencia no pueden cortarse

También se realizarán los supuestos de que las preferencias cumplen con unas *propiedades de deseabilidad*, estas son la monotonicidad y la no saciabilidad local. Para definir monotonicidad es necesario asumir que siempre es posible consumir mayores cantidades de un bien.

Definition 8 Monotonicidad : la relación de preferencias \succsim en X es monótona si $x \in X$, $y \gg x^5$ implica $y \succ x$. Es estrictamente monótona si $y \geq x$ y $y \neq x$ implica que $y \succ x$.

⁵Significa que y debe tener un número mayor de todos los bienes que x , es decir $y_l > x_l$ para todo $l = 1, 2, L$.

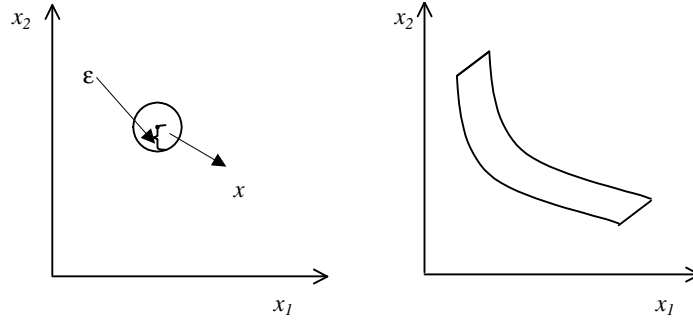


Figure 2.3: Insaciabilidad local

Este supuesto se aplica únicamente si las mercancías son "bienes" y no "males". Este supuesto parece suficiente porque cualquier mal puede ser visto como un bien. Por ejemplo, la basura, visto como un mal, puede ser redefinida como una mercancía llamada "ausencia de basura". ¿Qué otros ejemplos puede dar? Este supuesto también asume que siempre se quiere más a menos. Note que si las preferencias son estrictamente monótonas entonces las preferencias son monótonas.

Definition 9 Localmente no saciada : sostiene que para cualquier canasta $x \in \mathbb{R}_+^L$ y cualquier distancia arbitraria (llamaremos esta distancia $\varepsilon > 0$), existe una canasta $y \in \mathbb{R}_+^L$ distanciada de x por ε tal que $y \succ x$.⁶

Es decir, para cualquier canasta usted traza un círculo alrededor de ella, la insaciabilidad local. Esta propiedad sí permite la existencia de males; sin embargo, no permite que todas las mercancías sean males. Si esto fuera así nos enfrentaríamos a un problema trivial donde la solución óptima (punto de saciedad) es $x = 0$. En general, la insaciabilidad local no permite puntos de saciedad. Otra de las implicaciones de la *no saciabilidad local* (y por tanto de la *monotonicidad*) es que se habla de curvas de indiferencia delgadas. La figura 2.3 muestra que, ante curvas de indiferencia gruesas, todas las canastas lo suficientemente cercanas a un punto del conjunto de indiferencia serían indiferentes violando así la no saciabilidad local.

Otro supuesto central de las preferencias, que se encontrará muy a menudo en la economía, es el de *convexidad*. La convexidad de las preferencias explica los intercambios que un consumidor quiere hacer entre los distintos bienes.

Definition 10 Convexidad (definición 3.b.4 y 3.b.5): la relación de pref-

⁶Formalmente, una relación de preferencias es *localmente no saciada* si para todo $x \in X$ y todo $\varepsilon > 0$, existe un $y \in X$ tal que $\|y - x\| \leq \varepsilon$ y $y \succ x$ (siendo esta la distancia euclidiana

$$\|x - y\| = \left[\sum_{l=1}^L (x_l - y_l)^2 \right]^{1/2}$$

erencias \succsim en X es convexa si $\forall x \in X$ el contorno superior es un conjunto convexo y estrictamente convexa si el contorno superior es estrictamente convexo.⁷

Como puede intuirse, las curvas de indiferencia relacionadas a preferencias convexas pueden tener segmentos rectilíneos mientras que las estrictamente convexas debe ser curvas de indiferencia que sean curvilíneas. Estas son suposiciones fuertes pero bastante importantes a la hora de modelar el comportamiento del consumidor. La convexidad puede verse como una expresión formal de la inclinación de los agentes económicos hacia la diversificación. Es decir, si $x \sim y$ entonces $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ (una mezcla por la mitad de estas dos cestas) no puede ser peor que x o que y , en el caso de la convexidad, y debe ser estrictamente preferida en el caso de la convexidad estricta.⁸

2.2 Representación de las Preferencias

Las preferencias del consumidor son centrales para analizar la elección, la utilidad es una manera de describirlas. Las funciones de utilidad son útiles para propósitos analíticos. Si las preferencias se pueden resumir por una función de utilidad se pueden utilizar técnicas de programación matemática para resolver el problema del consumidor. Una *función de utilidad* $u(x)$ es una función que le asigna un valor numérico a cada elemento en X formando así un escalafón entre las canastas de acuerdo a las preferencias individuales.

Definition 11 Una función $u : X \rightarrow R$ es una función de utilidad que representa la relación \succsim si para todo $x, y \in X$

$$x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

Note que la función de utilidad que representa las preferencias no es única. Cualquier transformación monótona de $u(\cdot)$ ⁹ es una nueva función de utilidad representando las mismas preferencias que $u(\cdot)$. Es decir, es sólo el escalafón de las alternativas lo que interesa. La propiedad de que las funciones de utilidad son invariantes a cualquier transformación estrictamente monótona se le llama ordinalidad ya que el énfasis radica en la ordenación de las cestas de bienes. Las propiedades cardinales son aquellas que no se mantienen ante tales transformaciones.

La posibilidad de representar las preferencias mediante una función de utilidad esta íntimamente relacionada con la racionalidad.

⁷Esto es, una relación de preferencias es convexa si $y \succsim x$ y $z \succsim x$ entonces $\alpha y + (1-\alpha)z \succsim x$ para cualquier $\alpha \in [0, 1]$. Una relación de preferencias \succsim en X se dice estrictamente convexa si para todo x , se tiene $y \succ x, z \succ x$ y $y \neq z$ implica que $\alpha y + (1-\alpha)z \succ x$ para todo $\alpha \in (0, 1)$.

⁸Este supuesto también tiene problemas. Por ejemplo, digamos Pepe es indiferente entre la canasta x , compuesta por un vaso de jugo de naranja y ninguno de leche, y y , un vaso de leche y ninguno de jugo de naranja. No obstante, muy probablemente preferirá las mercancías separadas que una combinación de medio vaso de jugo y medio de leche.

⁹Una transformación monótona es una función $v(x) = f(u(x))$, donde $f : R \rightarrow R$ es una función estrictamente creciente, es decir, $x \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y)$. Ejemplos de transformaciones monótonas puede ser: $f(u) = 3u$, $f(u) = u + a$, $f(u) = u^3$, $f(u) = \ln(u)$

Proposition 12 *una relación de preferencias \succsim puede ser representada por una función de utilidad sólo si es racional.* (ver prueba en MWG)

Sin embargo, existen algunas preferencias racionales que no pueden ser representables; por ejemplo, las preferencias lexicográficas. Este tipo de preferencias, llamadas así por su similitud con el orden de los diccionarios, indican que la canasta preferida será la que tenga la mayor cantidad del primer bien; en el caso de que las dos canastas a comparar tengan la misma cantidad del primer bien se procede a comparar la cantidad del segundo bien y así sucesivamente. Estas preferencias son completas, transitivas, estrictamente monótonas y estrictamente convexas.¹⁰ Sin embargo, no pueden ser representables ya que nunca dos canastas son indiferentes, esto implica que no sea posible asignarle un número a cada canasta porque los números reales no alcanzarían. Para asegurar que siempre exista una representación para cada canasta debemos asegurar que las preferencias sean continuas.

Definition 13 Continuidad: *la relación de preferencias se dice continua si, dado que $x \succeq y$, entonces una canasta parecida a x debe ser al menos tan buena como una canasta parecida a y .*

La continuidad sostiene que las preferencias de los consumidores no exhibe saltos. Una forma equivalente de enunciar la continuidad es que los contornos superior e inferior son cerrados; es decir, incluyen sus fronteras. Note que las preferencias lexicográficas no cumplen esta propiedad.

Example 14 *Suponga de nuevo el caso de Pílon, esta vez con preferencias lexicográficas que le dan prioridad a las hamburguesas. Suponga una canasta $(2, 1)$ que es preferida a $(1.99, 2)$. Sin embargo, la canasta $(2, 2)$ se preferirá a $(2, 1)$, aún cuando es una pequeña variación de $(1.99, 2)$, esto muestra que este tipo de preferencias no son continuas.*

Proposition 15 *Si una relación de preferencias \succsim es racional y continua entonces existe una función de utilidad continua¹¹ que la representa.* (ver prueba en MWG)

Usualmente trabajaremos con funciones de utilidad diferenciables para propósitos analíticos. Sin embargo, es posible que algunas preferencias no puedan representarse con funciones diferenciables; por ejemplo, cuando los bienes se consumen en proporciones fijas. Al imponer diferenciability de las funciones se está condicionando a que los conjuntos de indiferencia sean superficies suaves de tal forma que la tasa a la que se sustituyan las mercancías dependan de los niveles de consumo. Las demás restricciones que hasta ahora hemos impuesto sobre las preferencias se traducen en restricciones sobre la forma de la utilidad:

¹⁰ ¿Puede el lector corroborar esto?

¹¹ Intuitivamente una función f es continua en x si en cualquier punto x' que sea muy cercano a x , su imagen es una buena aproximación del valor de f en x . Si f es continua en todos los puntos del dominio entonces podemos decir que la función es continua. Para una revisión más detallada de esta definición véase (?). Ahora bien, si la derivada existe en cualquier punto entonces la función es diferenciable y por tanto continua.

1. La propiedad de *monotonidad*¹² implica que la función de utilidad es creciente: $u(x) > u(y)$ si $x \gg y$.
2. La propiedad de preferencias *convexas* implican que $u(\cdot)$ es *cuasicóncava*.¹³ De igual forma, la convexidad estricta de las preferencias implican la cuasicóncavidad estricta de $u(\cdot)$.

Estas propiedades sobre la función de utilidad son de carácter ordinal, mientras la continuidad es cardinal ya que las transformaciones monótonas no necesariamente deben ser continuas.

2.3 Utilidad Marginal

La utilidad marginal definirá cómo varía la utilidad del individuo cuando obtiene una cantidad adicional de una mercancía. En términos matemáticos, la utilidad marginal respecto al bien 1 será

$$UMg_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}$$

La monotonidad de las preferencias implica que la utilidad marginal sea positiva. Además, a menudo se supone que la utilidad marginal es decreciente ya que entre más consume de un bien menor es la utilidad adicional que me reporta, esta noción fue introducida por Marshall. Por ejemplo, después de hacer ejercicio, el primer vaso de agua que nos tomamos nos brinda una enorme satisfacción. La satisfacción adicional que nos representa el segundo vaso es menor a la que nos dio el primer vaso. De esta forma, si seguimos tomando agua, el décimo vaso, si es que llegamos allá, nos brindará utilidad pero no demasiada al compararla con la del primer vaso.

Sin embargo, esto impone la restricción de que la función de utilidad sea cóncava,¹⁴ lo cual es más restrictivo que la cuasiconcavidad, donde no necesariamente se da que la utilidad marginal sea decreciente. Al respecto, Hicks sugirió que lo que se debía tener en cuenta eran las cantidades relativas de las mercancías $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ y cómo esta relación afectaba el deseo de intercambiar mercancías. Esto último es representado por la Tasa Marginal de Sustitución y el hecho de que esta sea decreciente, lo cual veremos a continuación.

2.4 Tasa Marginal de Sustitución

En la teoría económica, el intercambio que un individuo está dispuesto a dar entre dos bienes es conocido como *relación o tasa marginal de sustitución (TMS)*.

¹²Recuerde que si las preferencias son monótonas se conoce que si se traza una línea desde el origen, esta sólo cortará las curvas de indiferencia una vez.

¹³La función de utilidad es cuasicóncava si el conjunto $\{y \in R_+^L : u(y) \geq u(x)\}$ es convexo para todo x . Equivalentemente, u es cuasicóncava si, para todo $x, y \in X$, $u(ax + (1-a)y) \geq \text{Min}\{u(x), u(y)\}$

¹⁴Recuerde que una función cóncava se caracteriza porque la segunda derivada con respecto al mismo argumento es negativa, lo que llevaría a una utilidad marginal decreciente.

Gráficamente se refiere a la pendiente de la curva de indiferencia en un determinado punto y será la relación en que el consumidor estará dispuesto a sustituir el bien 1 por el bien 2. Supongamos una cesta de consumo $x = (x_1, x_2)$ que pertenece a una curva de indiferencia. La TMS nos dirá cuánto está dispuesto a sacrificar el individuo de x_1 (Δx_1) para consumir una unidad más de x_2 , de tal forma que quede en la curva de indiferencia inicial. Esto puede entenderse mejor con un ejemplo.

Example 16 *Suponga que tenemos una economía con dos bienes: hamburguesas y gaseosas. Suponga que Pílon tiene dos hamburguesas y diez gaseosas. Si Pílon intercambia cuatro gaseosas por dos hamburguesas y se siente igual de bien (le resulta indiferente) que con la anterior canasta diremos que su TMS en ese punto es -2 , es decir, por una hamburguesa está dispuesto a dar 2 gaseosas.*

También podemos definir la TMS en términos de utilidades marginales. Para formular matemáticamente este concepto debemos mantener constante la utilidad para asegurar que nos encontramos en la misma curva de indiferencia. Suponiendo que existen dos bienes, por lo tanto $u = u(x_1, x_2)$, derivamos totalmente esta ecuación obteniendo:

$du = 0 = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2$, donde dx_1 es la variación en el consumo de un bien.

Despejando de allí dx_2/dx_1 se tendrá que

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}}$$

Así, la pendiente de la curva de indiferencia o TMS será

$$TMS = -\frac{UMg_1}{UMg_2}$$

El signo de la TMS es negativo siempre y cuando las dos mercancías sean deseables o las dos mercancías no sean deseables. Esto es intuitivo ya que si se obtiene una cantidad mayor del bien 1 debería recibirse una cantidad menor del bien 2 para conservar el mismo nivel de utilidad. Por el contrario, si tengo un mal y un bien, la TMS será positiva.

El supuesto de convexidad de las preferencias implica que la TMS sea decreciente, esto es $\frac{\partial TMS}{\partial \left(\frac{x_2}{x_1}\right)} \leq 0$, ya que cuando el consumidor posee grandes cantidades de uno de los bienes estará dispuesto a intercambiar una gran cantidad de éste para obtener algo del otro bien que carece. De esta manera se refleja el interés del individuo por diversificar y tener una cantidad apropiada de todos los bienes, a esto se refería Hicks.

Example 17 *Siguiendo con el ejemplo anterior, la convexidad implica que si ahora Pílon quiere hacer de nuevo un intercambio su TMS debe ser menor que la anterior; ahora por una hamburguesa debe dar menos de 2 gaseosas ya que no tiene tantas como tenía antes. Esto quiere decir que a medida que vaya intercambiando un bien por otro y que quiera seguir intercambiándolo, las cantidades que estoy dispuesto a sacrificar deben ser menores*

2.5 Elasticidad de Sustitución

Suponga que tenemos una función $y = f(x)$. La elasticidad de y con respecto a x nos indica la variación porcentual de y ante una variación porcentual de x . Formalmente $\varepsilon_{y,x} = \frac{dy/y}{dx/x} = \frac{dy}{dx} \frac{x}{y} = \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)}$.¹⁵ Este concepto puede aplicarse también a la TMS. Así, mientras la TMS mide la pendiente de una curva de indiferencia, la elasticidad de sustitución mide su curvatura. Más concretamente, la elasticidad de sustitución mide la variación porcentual del cociente entre las cantidades dividida por la variación porcentual de la TMS, manteniéndose fija la utilidad.

Si $\Delta(x_2/x_1)$ es la variación del cociente entre las cantidades y ΔTMS es la variación de la tasa marginal de sustitución, entonces la elasticidad de sustitución se definirá como:

$$\sigma = \frac{\frac{\Delta(x_2/x_1)}{x_2/x_1}}{\frac{\Delta TMS}{TMS}}$$

Esta elasticidad indica cómo varía el cociente entre las cantidades de mercancías cuando varía la pendiente de la curva de indiferencia. Utilizando derivadas podemos expresar la elasticidad de sustitución de la siguiente forma:

$$\sigma = \frac{d(x_2/x_1)}{dTMS} \cdot \frac{TMS}{(x_2/x_1)} = \frac{d(\ln(x_2/x_1))}{d(\ln TMS)}$$

2.6 Algunas funciones de utilidad

En algunas aplicaciones (particularmente econométricas) es común centrarse en preferencias donde es posible deducir la relación de preferencia completa a partir de un solo conjunto de indiferencia, dos ejemplos son las preferencias homotéticas y las preferencias cuasilineales. Este tipo de preferencias también tienen implicaciones sobre las funciones de utilidad. Estas propiedades son de carácter cardinal ya que no se conservan ante transformaciones monótonas, lo único que podemos asegurar es que existe al menos una función de utilidad con dicha forma específica.

Para obtener una curva de indiferencia de una función de utilidad debemos igualar la función a una constante $u(x_1, x_2) = k$, y luego despejar x_2 . De esta forma obtendremos todas las combinaciones entre x_1 y x_2 que producen la misma utilidad k . A continuación se mostrarán algunos ejemplos de funciones de utilidad dadas las preferencias del individuo. Con el fin de visualizarlos se manejarán dos mercancías. Vale la pena resaltar que las siguientes funciones de utilidad no son del todo realistas pero facilitan algunos procedimientos matemáticos.

2.6.1 Preferencias Homotéticas

Definition 18 Una relación de preferencias monótona es homotética si todos los conjuntos de indiferencia están relacionados por su expansión proporcional

¹⁵ Esto es cierto ya que $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$.

a través de rayos; esto es, si $x \sim y$ entonces $\alpha x \sim \alpha y$, para todo $\alpha > 0$.¹⁶

En palabras, si tengo que dos canastas son indiferentes entonces al duplicar ambas canastas estas seguirán siendo indiferentes. Este hecho puede observarse en la siguiente gráfica 2.4. Si las preferencias son homotéticas tendremos que la TMS depende únicamente del cociente entre las cantidades de las dos mercancías. Es decir, si se tiene $TMS(x_1, x_2) = \phi(x_1/x_2)$ entonces $TMS(tx_1, tx_2) = \phi(x_1/x_2)$. Esto quiere decir que la pendiente de todas las curvas de indiferencia son iguales si se evalúan en el punto donde se intersectan con un rayo que pase por el origen. Los ejemplos más comunes de estas preferencias son los sustitutos perfectos, complementarios perfectos, la Cobb-Douglas y la CES, que es su forma generalizada.

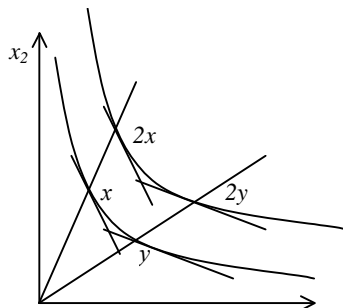


Figure 2.4: Homotéticas

Sustitutos perfectos

Dos bienes son sustitutos perfectos si el consumidor está dispuesto a sustituir uno por otro a una tasa constante. La característica esencial de estas mercancías

¹⁶Una definición análoga es que una relación de preferencia continua en X es homotética si y solo si admite una función de utilidad homogénea de grado uno.

El grado de homogeneidad de una función puede encontrarse mediante dos métodos:

1. Multiplicador: se multiplica las cantidades por una misma constante y se observa cómo varía la utilidad, $u(tx_1, tx_2) = t^k u(x_1, x_2)$. De esta forma el grado de homogeneidad es igual a k .
2. Teorema de Euler: Si se tiene una función $u(x_1, x_2)$ y se realiza $\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} x_2 = k \cdot u(x_1, x_2)$, el grado de homogeneidad de la función $u(\cdot)$ lo dará el valor de k .

Si $k = 0$, la función de utilidad es **homogénea de grado 0**, es decir que si se aumenta el consumo de ambos bienes en una misma proporción el nivel de utilidad no se verá afectado. Si $0 < k < 1$, quiere decir que a cambios (de igual proporción) en el nivel de consumo, el nivel de utilidad aumentará **menos** que proporcionalmente. Si $k = 1$, es **homogénea de grado 1** y quiere decir que a cambios proporcionales en el nivel de consumo de los bienes, el nivel de utilidad aumentará en la misma proporción. Si $k > 1$, quiere decir que a cambios (de igual proporción) en el nivel de consumo, el nivel de utilidad aumentará **más** que proporcionalmente.

es que la curva de indiferencia tiene una pendiente constante (TMS constante). Un ejemplo es la mantequilla y la margarina. Las preferencias pueden ser representadas por una función de utilidad que en este caso sería

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$$

En donde a, b miden el valor que tienen los bienes 1, 2 para el consumidor. Esto quiere decir que el consumidor siempre estará dispuesto a intercambiar una unidad del bien 1 por a/b unidades del bien 2. Es decir, la $TMS = -a/b$ (véase la figura 2.6). Esta clase de preferencias son homotéticas, la función de utilidad es homogénea de grado uno y la elasticidad de sustitución es igual a infinito.

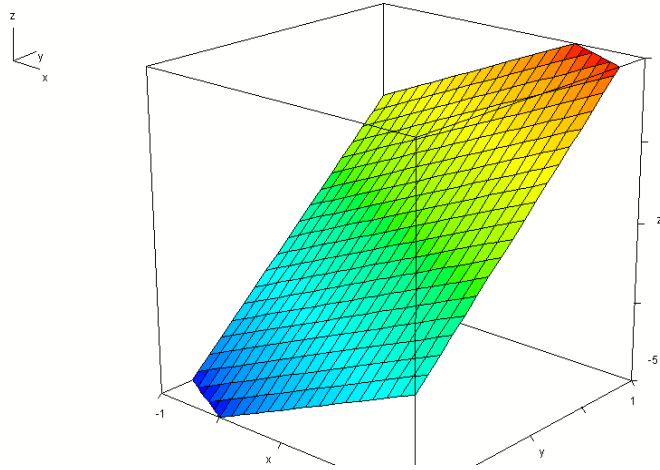


Figure 2.5: Función de utilidad, sustitutos perfectos

Complementarios perfectos

Se da cuando las mercancías se complementan en cierto sentido, e.g zapato del pie derecho y zapato del pie izquierdo. Al consumidor le gustan los zapatos pero no le sirve de nada llevar uno solo o llevar dos del izquierdo y ninguno del derecho. Otro ejemplo es el café y el azúcar, mucha gente los consume siempre en proporciones fijas. Una cantidad adicional de una mercancía no tiene ningún valor para el individuo. La forma funcional de la utilidad (véase figura 2.7) es

$$u(x_1, x_2) = \text{Min} \{ax_1, bx_2\}$$

donde a, b indican las proporciones que se consumen de cada bien. Es decir que $1/a$ unidades del bien 1 deben ir acompañadas de $1/b$ unidades del bien 2. La curva de indiferencia será como en la figura 2.8

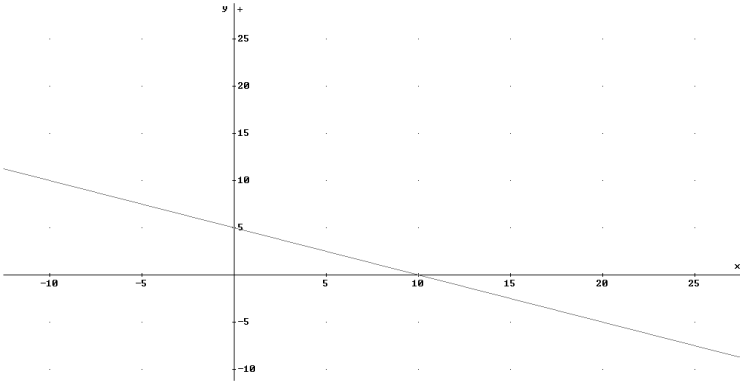


Figure 2.6: Curva de indiferencias, sustitutos perfectos

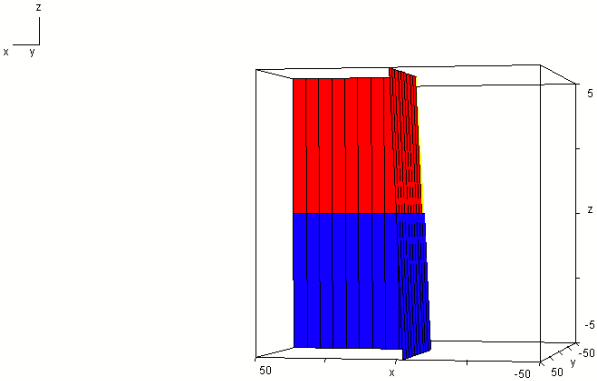


Figure 2.7: Función de utilidad, complementarios perfectos

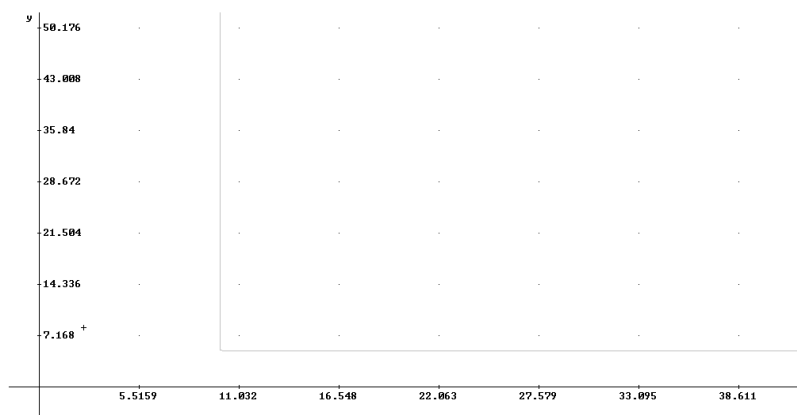


Figure 2.8: Curva de indiferencia, complementarios perfectos

- Esta función de utilidad también es homogénea de grado uno. La $TMS =$

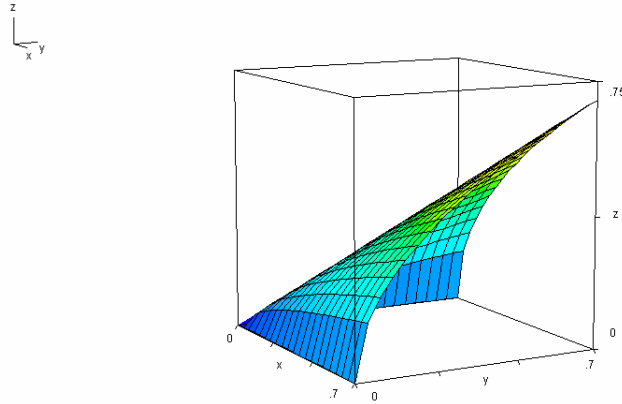
$$\begin{cases} \infty & \text{cuando } \frac{x_2}{x_1} > \frac{a}{b} \\ \text{indefinida} & \text{cuando } \frac{x_2}{x_1} = \frac{a}{b} \\ 0 & \text{cuando } \frac{x_2}{x_1} < \frac{a}{b} \end{cases}$$

En todos los anteriores casos la elasticidad de sustitución es igual a cero, como su nombre lo indica.

Cobb-Douglas

La forma funcional de una Cobb-Douglas es $u(x_1, x_2) = Ax_1^\alpha x_2^\beta$. Note que si $\alpha + \beta = 1$ tendremos que la función es homogénea de grado uno. Aunque, como se ha visto, existen varias funciones que representan la misma relación de preferencia. La transformación monótona más usual es $u(x_1, x_2) = \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2$. En ambos casos, α y β indican la importancia relativa de los dos bienes para el consumidor (más adelante se verá que representan, cuando el problema se restringe al ingreso, la proporción del ingreso que el individuo está dispuesto a gastar en cada bien).

Esta clase de preferencias son un caso intermedio a los sustitutos y a los complementarios. Su $TMS = \frac{ax_2}{bx_1}$, lo que implica que no sea constante y que represente preferencias homotéticas. Su elasticidad de sustitución es 1. Un ejemplo de esta función de utilidad se muestra en la siguiente figura 2.6.1.

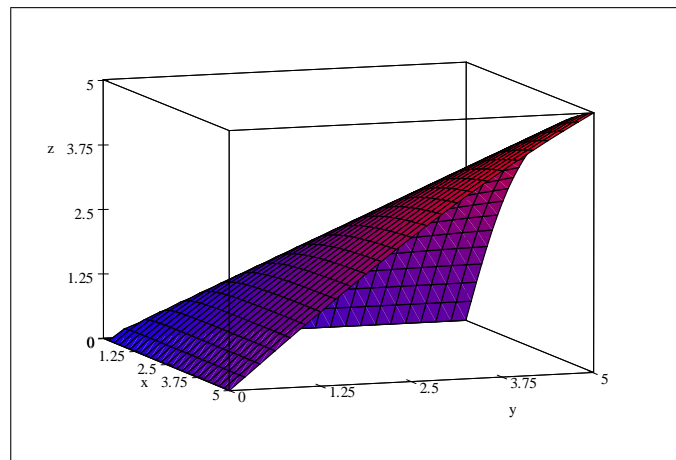


Cobb-Douglas

Elasticidad de Sustitución Constante (CES, por sus siglas en inglés)

Esta función de utilidad es la más general de todas y de ella, bajo algunos valores de los parámetros, se obtienen las demás formas funcionales. La forma funcional (véase la gráfica en 3 dimensiones en 2.9) es

$$u(x_1, x_2) = [ax_1^{-\rho} + (1-a)x_2^{-\rho}]^{-1/\rho}$$

Figure 2.9: CES ($\rho = 2$)

Su $TMS = -\frac{a}{1-a} \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{-(1+\rho)}$ y, como su nombre lo indica, la elasticidad de sustitución es siempre igual, y su valor es $1/(1-\rho)$. Note que cuando $\rho = 0$

tenemos el caso de la Cobb-Douglas, cuando $\rho = 1$ tenemos el caso de sustitutos perfectos y cuando $\rho = -\infty$ el caso de complementarios perfectos.

2.6.2 Preferencias Cuasilineales

Definition 19 Una relación de preferencias en $X = (-\infty, \infty) \times R_+$ es cuasilineal con respecto a la mercancía 1 (el numerario) si:

1. Todos los conjuntos de indiferencia son desplazamientos paralelos de cada uno a lo largo del eje de la mercancía 1. Esto es, si $x \sim y$, entonces $(x + \alpha e_1) \sim (y + \alpha e_1)$ para $e_1 = (1, 0)$ y cualquier $\alpha > 0$.
2. La mercancía 1 es deseable; esto es, $x + \alpha e_1 \succ x$ para todo x y $\alpha > 0$.

Esto significa que si tengo dos canastas indiferentes y le sumo alguna cantidad del numerario a las dos canastas, las nuevas siguen indiferentes. Note que en la definición no se utiliza como espacio R_+^2 porque se asume que no existe límite inferior para el numerario. Suponiendo que tenemos dos bienes, una relación de preferencia continua en $X = (-\infty, \infty) \times R_+$ es cuasilineal con respecto a la primera mercancía si y solo si admite una función de utilidad de la forma

$$u(x_1, x_2) = x_1 + v(x_2)$$

y se dice que la función de utilidad es lineal en x_1 . Note que las preferencias por sustitutos perfectos también es cuasilineal. Otro ejemplo concreto de esta función de utilidad es $u(x_1, x_2) = x_1 + \ln x_2$. La siguiente gráfica muestra la forma de estas preferencias (ver figura 2.10)

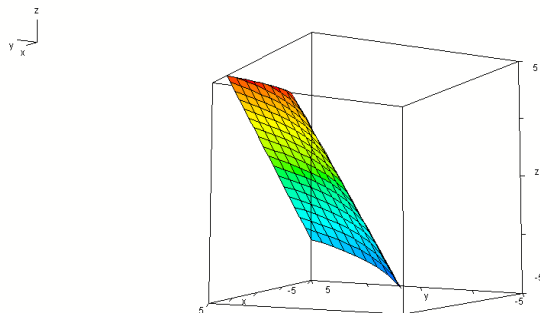
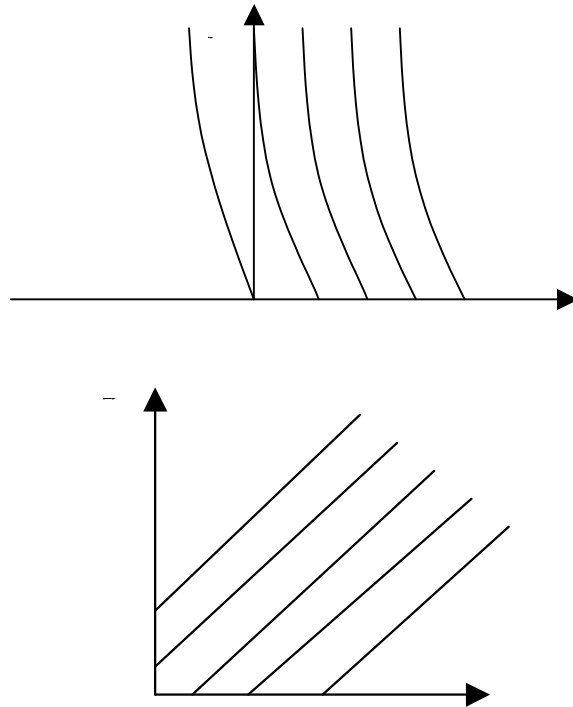


Figure 2.10: Función de utilidad cuasilineal

Y su curva de indiferencia es como muestra en la siguiente figura 2.6.2



En el caso de las preferencias cuasilineales note que la utilidad marginal del numerario siempre es constante (e igual a uno) en cualquier punto. Luego, si calculamos la *TMS* está solo dependerá de las otras mercancías. Esto implica que el deseo de una persona de renunciar a una unidad de x_2 para conseguir una unidad más de x_1 depende únicamente de la cantidad que tenga de x_2 .

Males

Un mal es una mercancía que no le gusta al consumidor, es decir que su función de utilidad se verá disminuída si existe consumo de ese bien. En general, las curvas de indiferencia serán como las que se presentan en la figura 2.6.2 si su función de utilidad es expresada como $u(x_1, x_2) = ax_1 - bx_2$.¹⁷ Allí el individuo estará mejor entre más lejos se encuentre del eje que representa el mal. En este caso la *TMS* tendrá pendiente positiva porque existe un bien que no es deseable.

¹⁷Cuidado, este tipo de representación es cuasilineal; sin embargo, pueden existir otras representaciones de males que no sean cuasilineales.

Neutrales

Un bien es neutral si al consumidor le da igual consumir el bien o no consumirlo, es decir que su función de utilidad no depende del consumo de ese bien. Por más cantidades que le den de ese bien su utilidad no se verá afectada. Este tipo de preferencias pueden asociarse a preferencias cuasilineales. La forma funcional cuando el individuo es neutral al bien 2 es la siguiente

$$u(x_1) = ax_1$$

La curva de indiferencia se muestra en la figura 2.11

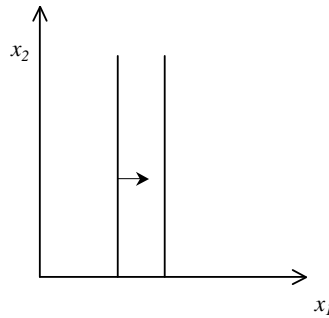


Figure 2.11: Preferencias por un bien neutral (x_2) y uno deseado.

2.6.3 Preferencias que no cumplen supuestos tradicionales

Existen otro tipo de funciones que no cumplen con los supuestos mencionados anteriormente; sin embargo, pueden resultar útiles para el análisis de algunas situaciones.

Preferencias no convexas

En general, las preferencias no son convexas si el individuo prefiere consumir los bienes por separado, de esta forma el individuo está dispuesto a pagar cada vez más por las sucesivas unidades adicionales (la *TMS* no es decreciente). Como se dijo antes, un ejemplo de estas preferencias se da cuando la combinación de dos canastas resulta en una canasta menos apetecida (jugo de naranja y leche). Para observar esto más claro podría mirarse la figura 2.12 y hacer la combinación convexa de las cestas extremas, de este modo se intuye que la cesta media se encontraría en una curva de indiferencia menor que las cestas extremas.

un ejemplo de estas funciones de utilidad estaría compuesta por la siguiente forma funcional

$$u(x_1, x_2) = \text{Max} \{ax_1, bx_2\}$$

siendo las gráficas de la función de utilidad (figura 2.13) y de la curva de indiferencia (figura 2.14)

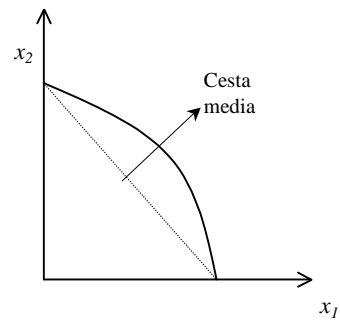


Figure 2.12:

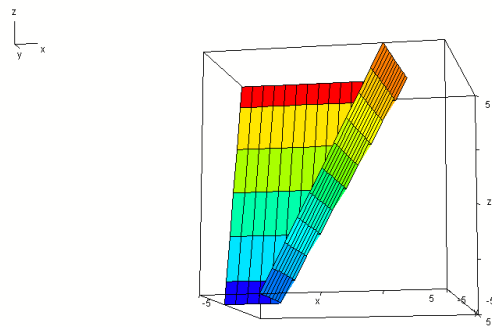


Figure 2.13: Función de utilidad de una Máximo

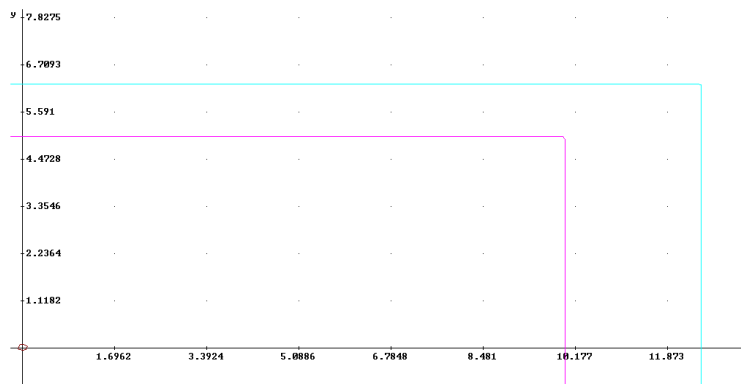
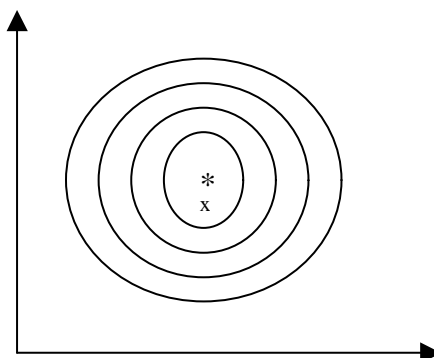


Figure 2.14: Curva de indiferencia de la Máximo



Preferencias con punto de saciedad

Existen funciones de utilidad donde existe un punto de saciedad y cualquier desviación del punto representará una menor utilidad para el individuo. La siguiente gráfica (figura 2.6.3) muestra este caso, allí x representa el punto donde se alcanza la máxima utilidad.

2.7 Extensiones

2.7.1 Preferencias especiales

En algunos estudios la calidad suele ser determinante para el consumo de un artículo u otro. En algunos modelos se asume que bienes iguales de distinta calidad son, en sí, bienes distintos. Otros modelos suelen suponer que la calidad es un bien por sí mismo. Por ejemplo puede pensarse una función $u = u(q, Q)$ donde q es la cantidad consumida y Q es la calidad de ese consumo. Esta función tiene algunas dificultades cuando la percepción de la calidad del bien depende de distintos atributos.

Otra forma (asumiendo que se consumen los bienes x, y) que tiene en cuenta la calidad sería $u(x, y) = u[Q(x, y), A(x, y)]$ ¹⁸ donde Q es una función de la calidad y A representa otros atributos de la canasta x, y . La calidad también se ha modelado teniendo en cuenta que la calidad de un producto es incierta y esta se supone correlacionada al precio del mercado. De esta forma se tendría que $u(x, y) = u(x, p_x, y)$.¹⁹

También es posible que las decisiones tomadas en un período afecten la utilidad de períodos posteriores, este es el caso de la adicción y de los hábitos.²⁰

Allí la utilidad podría modelarse como $u = u(x_t, y_t, s_t)$, donde $s_t = \sum_{i=1}^{\infty} x_{t-1}$ es

¹⁸Véase Lancaster (1971), *Consumer demand: a new approach*

¹⁹Véase Stiglitz (1987). "The causes and consequences of the dependence of quality on price". *JPoE*

²⁰Véase Becker (1988) "A theory of rational addiction"

el parámetro que relaciona estos hechos.

Chapter 3

Elección del Consumidor

(Resumen de: Cap 4 (?), Cap 5 y 8 Varian Intermedio, Cap 8 (?), Cap 3 (?), Cap 1 y 2 (?), Sección 2.5 Deaton & Muellbauer).

El problema de decisión al que se enfrentará el individuo puede enunciarse de dos maneras. El primero de ellos es escoger las canastas de tal forma que el individuo logre la mayor satisfacción posible, teniendo en cuenta que tiene una cantidad limitada de ingreso y existen unos precios que hay que pagar por adquirir mercancías. El segundo de ellos consiste en fijar un nivel de utilidad que se quiere alcanzar y elegir las cantidades de mercancías que lleven al menor gasto posible logrando la utilidad requerida. Estos dos problemas son dos caras de una misma moneda que llevarán a soluciones similares.

En la primera sección se planteará el primer problema mencionado. Las demandas óptimas obtenidas se llamarán demandas marshalianas y la utilidad máxima que se logra a través de ellas se llamará utilidad indirecta. Cada una de estas variables cumplirán unas propiedades útiles al momento de analizar las decisiones del consumidor. En la segunda sección plantearemos el segundo problemas, de nuevo hallando las demandas óptimas, que esta vez se llamarán hicksianas o compensadas, y con ellas la función de gasto mínimo. Estas también cumplirán algunas propiedades interesantes. Por último, observaremos como ambos problemas son duales, esto es, llegan a soluciones similares, y mostraremos cómo resolviendo un problema podemos llegar a las soluciones del otro problema. Lo anterior se conoce como dualidad.

3.1 Problema de Maximización de la Utilidad (*PMU*)

De este modo, el problema será hallar una cesta que se encuentre en el conjunto de posibilidades de consumo que le permita alcanzar el mayor nivel de utilidad factible. A lo largo de este capítulo se supondrá que la relación de preferencias que caracteriza al consumidor es racional, continua, no saciada localmente y

convexa; en otras palabras, asumiremos que las preferencias son representables por una función de utilidad continua y cuasicóncava.

Aun cuando algunos detractores de este enfoque afirman que ninguna persona real podría hacer los cálculos rápidos necesarios para maximizar su utilidad, Friedman argumenta, refiriéndose al jugador de billar, que "éste tampoco puede hacer los cálculos rápidos necesarios para dar un golpe de acuerdo con las leyes de la física, pero esas leyes predicen su conducta. (...) el modelo de la maximización de la utilidad predice muchos aspectos de la conducta, aún cuando nadie lleve una computadora con su función de utilidad programada" (?).

De esta manera, el supuesto de la maximización de la utilidad está diciendo que si un individuo es abordado a la salida de un supermercado, justo después que ha realizado su compra, y se le pregunta "Ud., teniendo exactamente la misma cantidad de dinero, la misma variedad de productos y la misma información que tenía al momento de realizar su compra, ¿habría escogido una canasta de consumo distinta a la que escogió?" la respuesta a esta pregunta por parte del individuo debería ser "No, absolutamente no" ya que de lo contrario, ¿por qué escogió esa canasta y no la otra?

3.1.1 Planteamiento del problema y de su solución

Suponiendo que el conjunto de consumo es $X = R_+^L$, que los precios son estrictamente positivos ($p \gg 0$) y el nivel de riqueza del individuo es también estrictamente positivo, $w > 0$. El *Problema de Maximización de la Utilidad (PMU)* será

$$\text{Max} \quad u(x) \tag{3.1}$$

$$\text{s.a.} \quad px \leq w \tag{3.2}$$

$$x \in X \tag{3.3}$$

Lo que significa que el consumidor maximizará su función de utilidad (ecuación 3.1) sujeto a que el gasto que haga en la compra de los bienes sea menor o igual al ingreso del que dispone (ecuación 3.2, que como ya se sabe es su conjunto presupuestal) y adicionalmente, que la cesta que escoja sea factible es decir que pertenezca a su conjunto de consumo (ecuación 3.3). En general, se tendrá que el individuo escogerá una canasta sobre la recta presupuestal debido al supuesto de insaciabilidad local.¹

Proposition 20 *El problema de la maximización de la utilidad tiene solución si todos los precios son estrictamente positivos ($p \gg 0$) y la función de utilidad $u(x)$ es continua*

¹ Recuerde que la insaciabilidad local lleva a que cualquier punto en el interior del conjunto presupuestal sea superado por alguno del límite. Ahora bien, dado que la insaciabilidad local no permite dos males, los puntos que superan a los del interior estarán justo sobre la restricción presupuestal.

Si $u(x)$ es diferenciable, la maximización restringida se realiza por el método del Lagrange² y la canasta óptima de consumo se obtiene mediante las condiciones de primer orden. Suponiendo que se tienen dos bienes, el problema del Lagrangiano quedará de la siguiente forma

$$\mathcal{L} = u(x_1, x_2) + \lambda(w - p_1x_1 - p_2x_2)$$

de esta forma, las condiciones de primer orden serán
c.p.o:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 : \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 : \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 : w - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \quad (3.6)$$

Note que de las dos primeras condiciones (ecuaciones 3.4 y 3.5) se obtiene que en el óptimo

$$\lambda = \frac{\partial u / \partial x_1}{p_1} = \frac{\partial u / \partial x_2}{p_2}$$

Esto quiere decir que en el óptimo, cada uno de los bienes debe presentar el mismo cociente entre el *beneficio marginal* y el *coste marginal*. Si no fuese así, un bien prometería más disfrute marginal por peso gastado que otro y por lo tanto, estaría indicando que el individuo no está gastando sus recursos adecuadamente y que sería posible aumentar el nivel de utilidad cambiándose a otra cesta.

Reordenando esta expresión tendremos

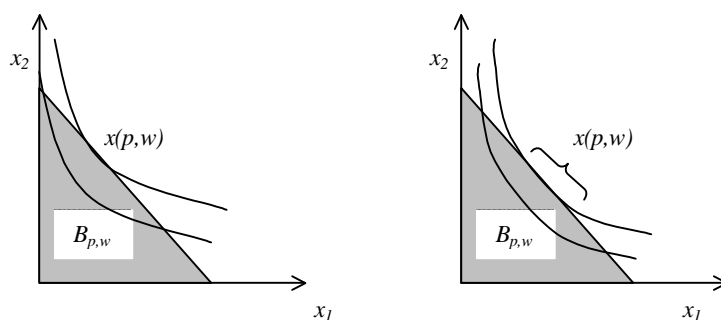
$$-TMS = \frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Esto significa que para maximizar la utilidad se debe igualar la pendiente de la recta presupuestal con la pendiente de la curva de indiferencia. Esa igualdad implica que la tasa a la cual el individuo está dispuesto a intercambiar una unidad de un bien por una unidad del otro debe igualarse a la tasa a la cual podría intercambiarlas en el mercado. Si la curva de indiferencia no fuera tangente a la restricción presupuestaria podría existir una canasta factible que permitiría alcanzar un mayor nivel de utilidad. Por ejemplo, dado el caso que $\frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2} > \frac{p_1}{p_2}$, esto significaría que si el individuo sacrifica una unidad de x_2 para consumir más de x_1 , quedando en la misma curva de indiferencia, gastaría menos dinero; es decir, ahora le sobraría dinero que puede usar para comprar más de la mercancía y así aumentar su utilidad. De esta forma, el consumidor deberá comprar más de x_1 y menos de x_2 hasta que se cumpla la igualdad.

²Una muy buena revisión sobre la existencia de la solución y las condiciones para hallar soluciones utilizando el método de Lagrange se encuentra en Sundaram (1996).

Mientras tanto, la tercera condición de primer orden (3.6) nos dirá que debemos gastar todo el ingreso. Esto significa que la canasta óptima se da cuando la curva de indiferencia es tangente a la recta presupuestal. Ahora bien, al resolver el PMU se obtienen dos elementos importantes: el conjunto de cestas óptimas que escoge el consumidor (que es el conjunto de solución del PMU), y el valor de la utilidad máxima (que es el valor que toma la utilidad luego de resolver el PMU).

A la canasta de consumo que resuelve el PMU se le llamará **Demanda Marshalliana** y se denota como una cesta de consumo $x^*(p, w) \in R_+^L$. Cuando \succsim es estrictamente convexa (y por tanto la función de utilidad es estrictamente cuasicóncava), x^* estará compuesto por un único elemento; mientras que si \succsim es débilmente convexa x^* será un conjunto.³ La figura 3.1.1 muestra estos hechos, mientras que en su parte izquierda la demanda marshalliana es únicamente un punto, la parte derecha muestra que la demanda marshalliana podría ser cualquier punto perteneciente a un rango de cestas es decir, puede ser una correspondencia.



Example 21 Si la relación de preferencias \succsim es estrictamente convexa la solución, en el caso en que se tenga Arroz y Coco como los únicos 2 bienes que se consumen, podría ser algo así como demandar 2 libras de Arroz y un Coco. Por el contrario, si la \succsim es convexa la solución podría ser demandar entre 4 y 6 libras de Arroz y entre uno y dos cocos.

Para cada vector de precio estrictamente positivo ($p \gg 0$) y un nivel de riqueza positivo ($w > 0$), el valor de la utilidad evaluada en la cesta de consumo óptima $u(x^*)$ para cualquier $x^* \in x^*(p, w)$ se denota como la **Función de Utilidad Indirecta** $v(p, w)$. Esta función se deberá interpretar como el máximo nivel de utilidad que el consumidor puede alcanzar dados unos precios en el mercado y su ingreso. Note que la función de utilidad indirecta depende de la forma de la función de utilidad escogida. Luego, si se hace una transformación monótona, la utilidad indirecta debe hallarse reemplazando las demandas en la función de utilidad inicial (sin transformar).

³Note entonces que cuando la función de utilidad es estrictamente cuasicóncava tendremos una función de demanda marshalliana, mientras que cuando sea únicamente cuasicóncava debemos hablar de correspondencia marshalliana.

Por otro lado, el multiplicador Lagrangiano λ , la variable que creamos para solucionar el problema, también tiene su respectiva interpretación. Éste usualmente se identifica con el precio sombra de relajar la restricción. En este caso, cuando se encuentra en el óptimo, es la utilidad marginal de una unidad adicional de ingreso.⁴

Example 22 *Por su complejidad tomaremos una función de utilidad CES para mostrar el proceso de maximización*

$$u(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$$

donde $0 \neq \rho < 1$,

el problema del consumidor será

$$\max_{x_1, x_2} (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho} \quad \text{s.a} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq w$$

el lagrangiano será

$$\mathcal{L} = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho} + \lambda(w - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

c.p.o:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 : (x_1^\rho + x_2^\rho)^{(1/\rho)-1} x_1^{\rho-1} - \lambda p_1 = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 : (x_1^\rho + x_2^\rho)^{(1/\rho)-1} x_2^{\rho-1} - \lambda p_2 = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 : w - p_1 x_1 + p_2 x_2 = 0 \quad (3.9)$$

Tomando las ecuaciones 3.7 y 3.8 se obtiene

$$x_1 = x_2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1/(\rho-1)} \quad (3.10)$$

utilizando 3.9 y 3.10 se obtendrá el valor del bien x_2 , para el cual se tiene

$$x_2^*(p, w) = \frac{p_2^{1/(\rho-1)} w}{p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}} \quad (3.11)$$

⁴Para demostrarlo se utilizará la regla de la cadena para saber cuál es el cambio en la utilidad ante un incremento de w . Teniendo en cuenta que $u(x_1, x_2)$ y que $x_i(p, w)$, se obtendrá que $u(x_1(p, w), x_2(p, w))$. Así, diferenciando totalmente con respecto al ingreso (hallando la utilidad marginal del ingreso) y reemplazando las condiciones de primer orden se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial w} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial w} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial w} = \lambda p_1 \frac{\partial x_1}{\partial w} + \lambda p_2 \frac{\partial x_2}{\partial w} = \lambda (p_1 \frac{\partial x_1}{\partial w} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial w})$$

Ahora bien, si se diferencia la restricción presupuestal (ley de Walras) con respecto al ingreso se obtendrá que:

$$p_1 \frac{\partial x_1}{\partial w} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial w} = 1$$

Reemplazando este resultado en la anterior ecuación, se obtiene lo deseado. Este precio sombra siempre será positivo lo que implica que a mayor ingreso mayor utilidad.

Siendo la expresión 3.11 la demanda marshalliana de parte del consumidor hacia el bien 2. Ahora, reemplazando en 3.10 se obtiene la Demanda Marshalliana del bien 1

$$x_1^*(p, w) = \frac{p_1^{1/(\rho-1)} w}{p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}} \quad (3.12)$$

Por último, para encontrar la función de utilidad indirecta, se evalúan las demandas marshallianas en la función de utilidad directa. Así, reemplazando 3.11 y 3.12 en la función de utilidad obtendremos

$$\begin{aligned} v(p, w) &= [(x_1^*(p, w))^\rho + (x_2^*(p, w))^\rho]^{1/\rho} \\ &= \left[\left(\frac{p_1^{1/(\rho-1)} w}{p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}} \right)^\rho + \left(\frac{p_2^{1/(\rho-1)} w}{p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}} \right)^\rho \right]^{1/\rho} \\ &= w \left[\frac{p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}}{(p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)})^\rho} \right]^{1/\rho} \\ v(p, w) &= w \left(p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)} \right)^{(1-\rho)/\rho} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Algunas complicaciones

El método de Lagrange no siempre encontrará la solución, es útil únicamente cuando las funciones de utilidad son estrictamente cuasiconcavas y diferenciables, y la solución no es de esquina. El primer problema se da cuando las funciones de utilidad no son diferenciables, por ejemplo una que modele preferencias por mercancías complementarias, $u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$. En este caso sabemos que la canastas óptimas se da cuando combinamos las mercancías en proporciones exactas que se requieren, si no se utilizan estas proporciones se estarían gastando recursos ineficientes.

Supongamos el caso de un individuo que le gustan b tazas de café con a cucharadas de azúcar. Si las tazas de café las expresamos como x_1 y las cucharadas de azúcar como x_2 , su función de utilidad puede expresarse como $u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$.⁵ En este caso, sabemos que en el óptimo el individuo debe satisfacer que $ax_1 = bx_2$, es decir

$$x_1 = \frac{b}{a} x_2$$

Luego se reemplaza esta condición en la restricción presupuestal obteniendo que $p_1 \frac{b}{a} x_2 + p_2 x_2 = w$. Y despejando de allí x_2 obtenemos la demanda marshalliana de las cucharadas de azúcar: $x_2(p, w) = \frac{aw}{bp_1 + ap_2}$. Luego, la demanda marshalliana de tazas de café es $x_1(p, w) = \frac{bw}{bp_1 + ap_2}$. Ahora bien, al reemplazar estas demandas en la función de utilidad obtendremos la función de utilidad indirecta, $v(p, w) = \min\left\{ \frac{abw}{bp_1 + ap_2}, \frac{abw}{bp_1 + ap_2} \right\} = \frac{abw}{bp_1 + ap_2}$.

⁵Note que esta es una de varias formas de representar estas preferencias, ¿por qué?

Otro de los casos donde no basta con aplicar el método de Lagrange se da cuando existen soluciones de esquina. En estos casos puede surgir la imposibilidad de igualar la *TMS* con la pendiente de la recta presupuestal. Por ejemplo si $\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} > \frac{p_1}{p_2}$ se supone que se debe disminuir el consumo de x_2 para aumentar el de x_1 ; sin embargo, cuando no es posible porque no se puede disminuir más el consumo de x_2 , es decir su consumo por esa mercancía es cero, entonces se tendrá una solución de esquina, es decir $x(p, w) = \left(\frac{m}{p_1}, 0\right)$.

Cuando las soluciones de esquina se presentan el problema debe ser caracterizado como un problema tipo Kuhn-Tucker o bien realizar el análisis gráfico. Este caso se muestra en la figura 3.1 donde se representan preferencias cuasilineales. Note que en el caso de los sustitutos perfectos puede existir una solución de esquina ya que tanto la *TMS* como la pendiente de la recta presupuestal son constantes. Por lo tanto, si $\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} > \frac{p_1}{p_2}$ la solución es $x(p, w) = \left(\frac{m}{p_1}, 0\right)$, si $\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} < \frac{p_1}{p_2}$ la solución es $x(p, w) = \left(0, \frac{m}{p_2}\right)$ y si $\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} = \frac{p_1}{p_2}$ entonces cualquier punto sobre la recta presupuestal es óptimo. Si tenemos una función de utilidad $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, tendremos que la utilidad indirecta en el primer caso es $v(p, w) = \frac{am}{p_1}$ y en el segundo caso $v(p, w) = \frac{bm}{p_2}$.

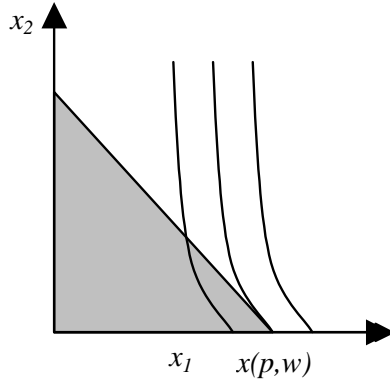


Figure 3.1: Solución de esquina

Por otro lado, si las preferencias no son convexas, y por ende la función de utilidad no es cuasiconcava, la condición de tangencia entre las dos curvas no es suficiente para llegar a un máximo. Este caso se ilustra en la figura 3.2 donde en el punto B son tangentes la recta presupuestal y la curva de indiferencia; sin embargo, no se alcanza el máximo nivel de utilidad. Por el contrario, el máximo se logra en A donde también se cumple tangencia y además se encuentra en una curva de indiferencia más alta. Por lo tanto, el método de Lagrange es válido siempre que las preferencias sean estrictamente convexas y la condición de tangencia se de en \mathbb{R}_+^L .

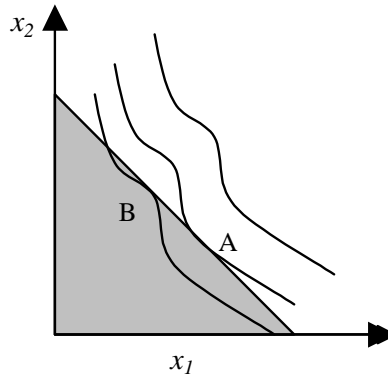


Figure 3.2: Ejemplo cuando la condición de tangencia no garantiza un máximo

Ahora bien, pueden suceder varias de las anteriores complicaciones al mismo tiempo. De nuevo tomemos el caso de vasos de jugo de naranja (x_1) y de leche (x_2), donde un individuo es indiferente entre las canastas $(b, 0)$ y $(0, a)$, y no le gusta combinar estas mercancías, es decir tomaremos el caso de un individuo con preferencias no convexas. Estas preferencias pueden ser representadas por la función de utilidad $u(x_1, x_2) = \max\{ax_1, bx_2\}$. Si $a/b > p_1/p_2$, entonces el individuo preferirá gastar todo su dinero en la mercancía 1 y la solución será $x(p, w) = \left(\frac{m}{p_1}, 0\right)$, con $v(p, w) = \frac{am}{p_1}$. Si $a/b < \frac{p_1}{p_2}$, gastará todo su dinero en la mercancía 2 y la solución será $x(p, w) = \left(0, \frac{m}{p_2}\right)$, con $v(p, w) = \frac{bm}{p_2}$. Por último, si $\frac{a}{b} = \frac{p_1}{p_2}$ entonces el individuo optimizará en cualquiera de las dos esquinas y su utilidad indirecta será $v(p, w) = \frac{am}{p_1} = \frac{bm}{p_2}$. Note que las soluciones son similares a las del caso de sustitutos perfectos.

Por lo tanto, el método de Lagrange es válido siempre que las preferencias sean estrictamente convexas, la función de utilidad continua y la condición de tangencia se de en \mathbb{R}_{++}^L . En casos contrarios no debe aplicarse este método y el análisis debe utilizar otros instrumentos.

Remark 23 *En el caso de los bienes neutrales o males, el consumidor gasta todo su dinero en el bien que le genera utilidad y no gasta nada en el otro.*

Remark 24 *¿Qué sucederá si los bienes se consumen únicamente discretamente? La figura 3.3 representa el caso donde la mercancía 2 es continua y la 1 es discreta*

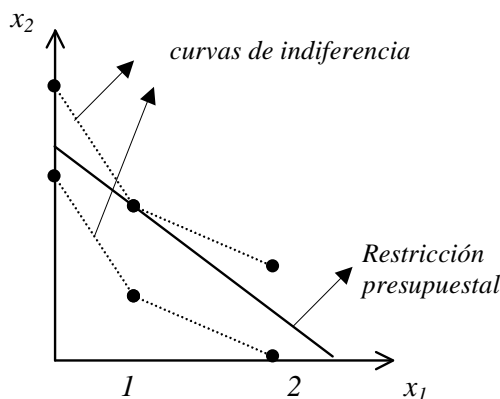


Figure 3.3: Bien discreto

3.1.2 Propiedades de la demanda marshalliana ($x^*(p, w)$)

Proposition 25 Si la función de utilidad $u(x)$ es continua y representa unas preferencias localmente no saciadas definidas en el conjunto de consumo X , entonces la demanda Marshalliana $x^*(p, w)$ tiene las siguientes propiedades

1. Homogénea de grado 0 en (p, w) .⁶
2. Ley de Walras: $p \cdot x = w$ para todo $x \in x^*(p, w)$.⁷
3. Unicidad / Convexidad: si las preferencias son estrictamente convexas entonces $x^*(p, w)$ consiste de un sólo elemento. Si son débilmente convexas la correspondencia debe ser un conjunto convexo.⁸

⁶**Proof.** Suponga que multiplicamos tanto los precios como el ingreso por una constante α . Nuestra nueva restricción presupuestal será $\alpha p \cdot x = \alpha w$. Como ya se vio antes, esta es la misma restricción de un principio, es decir, $p \cdot x = w$. Como la función de utilidad no ha cambiado y la restricción tampoco entonces la solución debe ser la misma. ■

⁷**Proof.** La segunda propiedad es obvia si se tiene en cuenta que esa condición se impuso como restricción a la maximización. Si no fuera así el individuo podría mejorar su utilidad adquiriendo más bienes. ■

⁸**Proof.** ★Recuerde que si las preferencias son estrictamente convexas entonces una combinación entre dos canastas indiferentes debe ser estrictamente preferida a estas. Suponga que la solución no es única y consiste de dos canastas. Estas dos canastas deben ser indiferentes para que ambas sean solución, pero dado que las preferencias son estrictamente convexas entonces una combinación de las dos debe ser estrictamente preferida. Ahora, como el conjunto presupuestal es convexo, esta combinación también pertenecerá al conjunto presupuestal; por lo tanto, las anteriores dos canastas no eran solución y genera una contradicción. Para probar la convexidad de la correspondencia dada la convexidad de las preferencias debemos tomar dos puntos que pertenezcan al conjunto solución, digamos x y x' , estas dos canastas deben generar la misma utilidad. Como el conjunto de posibilidades de consumo es convexo entonces una combinación lineal de estas dos canastas ($x'' = \alpha x + (1 - \alpha)x'$) debe pertenecer al conjunto. Como las preferencias son convexas la función de utilidad es cuasiconcava, por

La primera propiedad nos dice que ante un cambio de la misma proporción tanto en los precios como en el ingreso, la cantidad demandada del bien no cambiará. Esto es intuitivo si tenemos en cuenta que desde el principio se asume que el individuo piensa en términos relativos. Por su parte, la segunda indica que todo lo que se tiene de ingreso se gastará en el consumo de los bienes, lo cual también es de esperar por la insaciabilidad local, tal y como se discutió antes.

La primera parte de la última propiedad nos dice que ya que no habrá combinaciones lineales de dos canastas indiferentes que generen la misma satisfacción de esas dos canastas entonces la solución debe ser única. Y la segunda parte nos dice que si son débilmente convexas y tenemos una correspondencia marshalliana, entonces una combinación lineal de dos soluciones debe también ser una solución. Lo anterior se da porque al ser el contorno superior débilmente convexo entonces todos los puntos del conjunto de indiferencia que se encuentran sobre la recta presupuestal son indiferentes y por lo tanto todos maximizan la utilidad.

Para el análisis de las respuestas de la demanda ante cambios en los precios y la riqueza (ingreso) es útil que la demanda del consumidor sea diferenciable, esto se cumplirá si las preferencias son continuas, estrictamente convexas y localmente no saciadas.

Example 26 Continuaremos el ejemplo anterior (CES) para demostrar las propiedades de la demanda por la mercancía 1⁹

- Homogénea de grado 0:

$$\begin{aligned} x_1^*(tp, tw) &= \frac{(tp_1)^{1/(\rho-1)}tw}{(tp_1)^{\rho/(\rho-1)} + (tp_2)^{\rho/(\rho-1)}} \\ x_1^*(tp, tw) &= \frac{t^{\rho/(\rho-1)}p_1^{1/(\rho-1)}w}{t^{\rho/(\rho-1)}[p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}]} = x_1^*(p, w) \blacksquare \end{aligned}$$

- Ley de Walras:

$$p_1x_1^*(p, w) + p_2x_2^*(p, w) = w$$

$$\begin{aligned} p_1 \frac{p_1^{1/(\rho-1)}w}{p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}} + p_2 \frac{p_2^{1/(\rho-1)}w}{p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}} &= \\ w \left[\frac{p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}}{p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}} \right] &= w \blacksquare \end{aligned}$$

lo tanto $u(x'') \geq u(x) = u(x')$. Luego, si x'' no pertenece al conjunto solución es porque es estrictamente preferida pero eso sería una contradicción porque entonces el conjunto solución no era solución. ★ ■

⁹Para mostrar el cumplimiento de las propiedades de la demanda por la mercancía 2 se puede realizar análogamente.

- *Unicidad:* Note que dados unos precios y un ingreso la solución será única pues la demanda marshalliana es una función.

Exercise 27 Compruebe las propiedades de las demandas marshallianas de los sustitutos, complementarios y las correspondientes a la función máximo.

3.1.3 Propiedades de la Utilidad Indirecta ($v(p, w)$)

Proposition 28 Si la función de utilidad $u(x)$ es continua y representa unas preferencias localmente no saciadas definidas en el conjunto de consumo X , entonces la función de utilidad indirecta $v(p, w)$ cumple con las siguientes propiedades

1. Homogénea de grado 0 en (p, w) .¹⁰
2. No creciente en p_ℓ para cualquier ℓ : si $p' \geq p, v(p', w) \leq v(p, w)$ (con derivadas se vería como $\partial v / \partial p_\ell \leq 0$).¹¹
3. Estrictamente creciente en w ($\partial v / \partial w > 0$).¹²
4. ★ Cuasiconvexa en (p, w) , esto es, el conjunto $\{(p, w) : v(p, w) \leq \bar{v}\}$ es convexo para todo \bar{v} .★¹³
5. Es continua para todo $p \gg 0, w > 0$.¹⁴

¹⁰**Proof.** Como la demanda es homogénea de grado cero en precios e ingreso quiere decir que ante un aumento de estos el individuo demandará la misma canasta, luego la utilidad tampoco cambiará. ■

¹¹**Proof.** Si los precios aumentan, el poder adquisitivo del individuo disminuye y la recta presupuestal se contrae. Esto origina que el conjunto de posibilidades de consumo sea más pequeño y por ende que la nueva solución no me permita lograr una utilidad mayor. ■

¹²**Proof.** Contrario al caso anterior, un aumento del ingreso llevará a que el conjunto de posibilidades de consumo se expanda y que la nueva solución, debido a la insaciabilidad local, me lleve a utilidades mayores. Esto también se mostró con el multiplicador Lagrangiano. ■

¹³Una definición análoga de una función cuasiconvexa es que para todo $(p, w), (p', w') \in \mathbb{R}_{++}^{L+1}$, $v(a(p, w) + (1-a)(p', w')) \leq \max\{v(p, w), v(p', w')\}$. Para una mayor discusión matemática al respecto véase (?)

Para demostrar cuasiconvexidad tomemos dos puntos que se encuentren en dicho conjunto, digamos (p, w) y (p', w') , luego $v(p, w) \leq \bar{v}$ y $v(p', w') \leq \bar{v}$. Ahora tomemos la combinación convexa de estas parejas $(p'', w'') = (\alpha p + (1-\alpha)p', \alpha w + (1-\alpha)w')$ donde $\alpha \in (0, 1)$. Ahora debemos demostrar que esta pareja también está en el conjunto, es decir, que $v(p'', w'') \leq \bar{v}$. Así que debemos mostrar que para cualquier x tal que $p'' \cdot x \leq w''$, debemos tener $u(x) \leq \bar{v}$. Note que $p'' \cdot x \leq w''$, es lo mismo que $\alpha p \cdot x + (1-\alpha)p' \cdot x \leq \alpha w + (1-\alpha)w'$. Por lo tanto, $p \cdot x \leq m$ o $p' \cdot x \leq m'$ (o ambos). Si la primera desigualdad se da, entonces $u(x) \leq v(p, w) \leq \bar{v}$ y obtenemos el resultado. Si es la última desigualdad la que se cumple entonces $u(x) \leq v(p', w') \leq \bar{v}$ y se obtiene la misma conclusión.

¹⁴

Proposition 29 Proof. Si las preferencias son estrictamente convexas la función de demanda es continua y como la función de utilidad también es continua entonces la utilidad indirecta también debe serlo. Para ver la demostración en el caso de que la demanda sea una correspondencia remítase a (?) ■

La primera propiedad indica que a un cambio de la misma proporción en precios y en ingreso, el nivel de utilidad máximo será igual al que se tenía antes de la variación. La segunda propiedad nos dice que ante un aumento en el precio de uno de los bienes el nivel de utilidad será por mucho igual al inicial. La tercera propiedad implica que ante un aumento de la riqueza del individuo su nivel de utilidad máximo aumentará.

★ La cuasiconvexidad se explica en la figura 3.4. Allí (p, w) y (p', w') generan la misma utilidad máxima. Sin embargo, una combinación de ellos, digamos (p'', w'') , que debe quedar entre las anteriores rectas presupuestales (la recta punteada del gráfico), no alcanza a generar la misma utilidad.¹⁵ ★ Por último, la continuidad lleva a que la función no tenga cambios fuertes cuando los parámetros cambian poco.

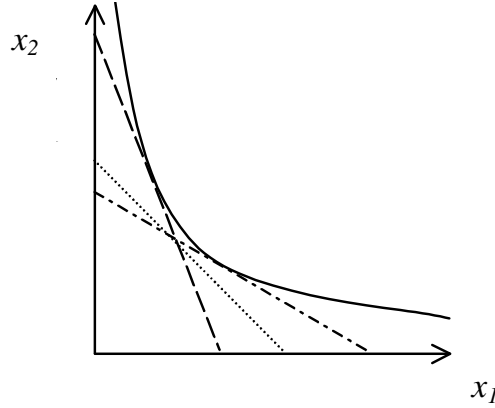


Figure 3.4: Cuasiconvexidad de la función de utilidad indirecta

Example 30 Continuando con el ejemplo anterior, ahora se mostrarán que las propiedades de $v(p, w)$ se cumplen:

- Homogénea de grado 0 en (p, w)

$$\begin{aligned}
 v(tp, tw) &= tw((tp_1)^{\rho/(\rho-1)} + (tp_2)^{\rho/(\rho-1)})^{(1-\rho)/\rho} \\
 &= twt^{-1} \left(p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)} \right)^{(1-\rho)/\rho} \\
 &= w \left(p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)} \right)^{(1-\rho)/\rho} = v(p, w)
 \end{aligned}$$

¹⁵Note que si estuviéramos trabajando con mercancías complementarias, la combinación convexa de las dos rectas presupuestales podría generar la misma utilidad si el vértice de la curva de indiferencia queda justo donde se cortan las las restas presupuestales. Es por esta razón que la definición de cuasiconvexidad permite estos casos, mientras la cuasiconvexidad estricta no lo permitiría.

- No creciente p_ℓ :

$$\frac{\partial v(p, w)}{\partial p_\ell} = - \left(p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)} \right)^{\frac{(1-\rho)}{\rho}-1} w p_\ell^{1/(\rho-1)} < 0 \text{ para } \ell = 1, 2$$

- Estrictamente creciente en w

$$\frac{\partial v(p, w)}{\partial w} = \left(p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)} \right)^{(1-\rho)/\rho} > 0$$

- ★ *Cuasicóncava. Ejercicio: la matriz hessiana orlada debe ser semidefinida positiva.* ★
- *Continua en p, w . Al ser diferenciable en p, w ya se ha comprobado que es continua*

Exercise 31 Compruebe las propiedades de la función de utilidad indirecta de los sustitutos, complementarios y la correspondiente a la función máximo.

3.2 Problema de Minimización del Gasto (PMG)

Además del *PMU* la elección del consumidor puede resolverse mediante la aproximación del Problema de Minimización del Gasto (*PMG*). Mientras en el problema anterior se hallaba el nivel máximo de utilidad que se podía obtener dado un nivel de ingreso y unos precios en el mercado, en este problema se determinará el mínimo nivel de ingreso que requiere un consumidor para alcanzar un nivel de utilidad \bar{u} o en otras palabras el mínimo gasto que debe hacer un consumidor para alcanzar un nivel de utilidad deseado. Aún así, el objetivo termina siendo similar: lograr un uso eficiente del poder de compra del consumidor sólo que cambiando la función objetivo y la restricción. Por esta razón se le conoce al *PMG* como el problema dual del *PMU*.

3.2.1 Planteamiento del problema y de su solución

Para resolverlo, asumiremos que la función de utilidad $u(\cdot)$ es continua y representa una relación de preferencias localmente no saciada definida en un conjunto de consumo X . Supondremos inicialmente que los precios no pueden ser negativos ni iguales a 0 ($p \gg 0$) y que el nivel de utilidad que se desea alcanzar debe ser mayor al que obtendría el individuo si decidiera no consumir nada de los bienes ($\bar{u} > u(0)$), el *PMG* será expresado como

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & px \\ \text{s.a.} & u(x) \geq \bar{u} \end{array} \quad (\text{PMG})$$

Se dará como nombre de **isogasto** a la función objetivo de este problema, la cual está definida por $e = p_1x_1 + p_2x_2$ en el caso en que existan 2 bienes. Es decir, la recta isogasto mostrará todas las canastas que se podrían conseguir realizando un mismo gasto igual a e .

El problema se representa en la figura 3.5. La canasta óptima de consumo es la canasta que menos cuesta y que permite al consumidor alcanzar el nivel de utilidad deseado \bar{u} . Gráficamente, es el punto en el conjunto $\{x \in R_+^2 : u(x) \geq \bar{u}\}$ que implica el menor gasto es decir, que se encuentra en la recta isogasto más cercana al origen.

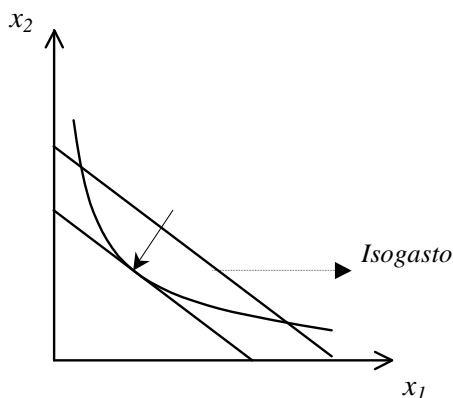


Figure 3.5: PMG

De nuevo, si la función de utilidad es diferenciable y cuasiconvexa y si la *TMS* se iguala a la pendiente de la recta isogasto en R_{++}^2 , podemos resolver el problema a través de un Lagrangiano. Sin embargo, dado que este método se utiliza para maximizar funciones, nuestro objetivo será el de maximizar $-p_1x_1 - p_2x_2$.¹⁶ El Lagrangiano quedará de la siguiente forma

$$\mathcal{L} = -p_1x_1 - p_2x_2 + \lambda(u(x_1, x_2) - \bar{u})$$

de esta forma, las condiciones de primer orden serán

c.p.o:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= 0 : -p_1 + \lambda \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} &= 0 : -p_2 + \lambda \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= 0 : u(x_1, x_2) - \bar{u} = 0 \end{aligned}$$

¹⁶Ya que $\text{Min } f()$ es equivalente a $\text{Max } -f()$

Note que de las dos primeras condiciones de nuevo obtendremos que

$$-TMS = \frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Esto confirma la dualidad de ambos problemas puesto que aquí también deben igualarse la pendiente de la curva de indiferencia con la de la recta de isogasto. Como veremos más adelante, la solución es exactamente la misma. En este problema el multiplicador lagrangiano será el inverso del hallado en el problema de maximización, esto se da porque la función objetivo y la restricción son intercambiadas. La interpretación es también la inversa, es el gasto marginal en el que hay que incurrir para lograr una unidad adicional de utilidad, $\lambda = \frac{\partial e}{\partial u}$.

Al realizar el problema de elección minimizando el gasto, dos elementos relevantes emergen, la Función de Demanda Hicksiana o Compensada y la Función de Gasto. El conjunto de cestas de consumo que permite alcanzar un nivel de utilidad determinado al mismo tiempo que se incurre en el menor gasto posible, es decir que resuelve el PMG, se denotarán como $x^h(p, \bar{u}) \in R_+^L$ y se les dará el nombre de **Función de Demanda Compensada o Hicksiana**.¹⁷ La razón de porqué se les conoce con el nombre de demanda compensada es que ante una variación en el precio el consumo del individuo, este está siendo compensando de forma tal que el nivel de utilidad inicial sea alcanzable.

Por otro lado, se entenderá como Función de Gasto el nivel de gasto mínimo que el consumidor debe hacer para alcanzar el nivel de utilidad deseado. De esta forma, dados unos precios estrictamente mayores a 0 ($p \gg 0$) y el nivel de utilidad deseado $u > u(0)$, el valor mínimo del gasto que resuelve el PMG se denota como la **Función de Gasto** $e(p, \bar{u})$, es decir $e(p, \bar{u}) = \min\{p \cdot x : u(x) \geq \bar{u}, x \in X\}$.

Example 32 *Se continuará con el mismo ejercicio que iniciamos con el PMU, de este modo se tendría que el problema del consumidor será*

$$\max -p_1 x_1 - p_2 x_2 \quad \text{s.a.} \quad (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho} \geq \bar{u}, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

el lagrangiano será

$$\mathcal{L} = -p_1 x_1 - p_2 x_2 + \lambda \left[(x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho} - \bar{u} \right]$$

c.p.o:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 : -p_1 + \lambda (x_1^\rho + x_2^\rho)^{(1/\rho)-1} x_1^{\rho-1} = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 : -p_2 + \lambda (x_1^\rho + x_2^\rho)^{(1/\rho)-1} x_2^{\rho-1} = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 : (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho} - \bar{u} = 0 \quad (3.16)$$

¹⁷ Al igual que en el PMU si la ζ no es estrictamente convexa se tendrá una correspondencia.

resolviendo por las ecuaciones 3.14 y 3.15 se llega a que

$$x_1 = x_2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1/(\rho-1)} \quad (3.17)$$

de esta forma, utilizando 3.17 conjuntamente con la restricción 3.16 se obtiene que

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \left[x_2^\rho \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\rho/(\rho-1)} + x_2^\rho \right]^{1/\rho} \\ x_2^h &= \bar{u} p_2^{1/(\rho-1)} \left[p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)} \right]^{-1/\rho} \end{aligned} \quad (3.18)$$

La demanda hicksiana por la mercancía 2 está dada por 3.18 y reemplazando este valor en la ecuación 3.17 se obtendrá la demanda hicksiana de la mercancía 1

$$x_1^h(p, \bar{u}) = \bar{u} p_1^{1/(\rho-1)} \left[p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)} \right]^{-1/\rho} \quad (3.19)$$

La función de gasto se hallará reemplazando 3.18 y 3.19 en la función objetivo, de este modo se tiene que

$$\begin{aligned} e(p, \bar{u}) &= p_1 x_1^h + p_2 x_2^h \\ &= \bar{u} p_1^{\rho/(\rho-1)} \left(p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)} \right)^{-1/\rho} + \bar{u} p_2^{\rho/(\rho-1)} \left(p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)} \right)^{-1/\rho} \\ &= \bar{u} \left(p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)} \right)^{(\rho-1)/\rho} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Continuación de las complicaciones

Como se dijo en el anterior capítulo, el método de Lagrange no logra las soluciones si las preferencias no son convexas, la función de utilidad no es continua y si la pendiente de la curva de indiferencia no se iguala con la relación de precios en el conjunto de consumo. En el caso de los bienes complementarios representados por la función de utilidad $u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$, sabemos que en el óptimo debemos tener que $ax_1 = \bar{u} = bx_2$. De esta forma, las demandas compensadas son $x_1(p, \bar{u}) = \frac{\bar{u}}{a}$ y $x_2(p, \bar{u}) = \frac{\bar{u}}{b}$, y la función de gasto $e(p, \bar{u}) = \frac{bp_1\bar{u} + ap_2\bar{u}}{ab}$.

En el caso de los sustitutos, donde $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, sabemos que pueden existir soluciones de esquina. Si $\frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2} > \frac{p_1}{p_2}$ la solución es $x^h(p, w) = \left(\frac{\bar{u}}{a}, 0 \right)$ y la función de gasto $e(p, \bar{u}) = \frac{\bar{u}p_1}{a}$. Si $\frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2} < \frac{p_1}{p_2}$ la solución es $x^h(p, w) = \left(0, \frac{\bar{u}}{b} \right)$ y la función de gasto $e(p, \bar{u}) = \frac{\bar{u}p_2}{b}$. Por último, si $\frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2} = \frac{p_1}{p_2}$ entonces cualquier punto sobre la curva de indiferencia, y por tanto de la isogasto, es óptimo. De esta forma, la función de gasto podemos generalizarla a

$e(p, \bar{u}) = \min\{\frac{\bar{u}p_1}{a}, \frac{\bar{u}p_2}{b}\}$.¹⁸ En el caso de las mercancías representadas por una función máximo tendremos soluciones similares a la de los sustitutos.

3.2.2 Propiedades de la Demanda Hicksiana

Proposition 33 *Si una función de utilidad $u(\cdot)$ es continua y representa una relación de preferencias localmente no saciadas que están definidas en el conjunto de consumo X , entonces para cualquier vector de precios estrictamente positivos $p \gg 0$, la función de demanda hicksiana $x^h(p, \bar{u})$ posee las siguientes propiedades*

1. *Homogénea de grado 0 en p : $x^h(ap, u) = x^h(p, \bar{u})$ para cualquier \bar{u} , p y $a > 0$. Es decir, que a un cambio de la misma proporción en los precios de todos los bienes, la cantidad demandada de cada uno de ellos será exactamente igual que la inicial; esto se da porque los precios relativos no varía.*¹⁹
2. *No hay exceso de utilidad: para cualquier $x \in x^h(p, \bar{u})$, $u(x) = \bar{u}$. Es decir, que si la cesta es óptima se alcanzará exactamente el nivel de utilidad que se deseaba alcanzar.*²⁰
3. *Unicidad / Convexidad: Si \succsim es convexa, entonces $x^h(p, \bar{u})$ es un conjunto convexo, y si \succsim es estrictamente convexo de forma que $u(\cdot)$ es estrictamente concavocóncava entonces x^h tendrá un único elemento.*²¹

Example 34 *Siguiendo el ejemplo con la función de utilidad CES, ahora se comprobarán las propiedades de las demandas hicksianas*

- *Homogénea de grado 0 en p :*

$$\begin{aligned} x_\ell^h(ap, \bar{u}) &= \bar{u}(ap_\ell)^{1/(\rho-1)} \left[(ap_1)^{\rho/(\rho-1)} + (ap_2)^{\rho/(\rho-1)} \right]^{-1/\rho} \\ x_\ell^h(ap, \bar{u}) &= \bar{u}p_\ell^{1/(\rho-1)} \left[p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)} \right]^{-1/\rho} = x_\ell^h(p, \bar{u}) \blacksquare \end{aligned}$$

¹⁸Note que la función de gasto de los complementarios es lineal y que la función de gasto de los sustitutos es una mínimo. Esto puede entenderse como cierta dualidad entre estos dos tipos de funciones.

¹⁹**Proof.** La homogeneidad se da porque la canasta óptima al minimizar $p \cdot x$ sujeto a $u(x) \geq u$ es la misma que al minimizar $\alpha p \cdot x$ ya que los precios no son una variable de elección. ■

²⁰**Proof.** Esta propiedad se da por la continuidad de $u(\cdot)$. Si tomo una canasta que me da una mayor utilidad a la de la restricción debe existir una cercana en la cual gaste menos y sea menos preferida pero lo suficientemente preferida para satisfacer la restricción. ■

²¹**Proof.** La prueba sigue el mismo análisis de la cuarta propiedad de las demandas marshallianas. ■

- No hay exceso de utilidad:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= (x_1^{h^\rho} + x_2^{h^\rho})^{1/\rho} \\ &= \left\{ \bar{u} p_1^{1/(\rho-1)} \left[p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)} \right]^{-1/\rho} \right\}^\rho + \left\{ \bar{u} p_2^{1/(\rho-1)} \left[p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)} \right]^{-1/\rho} \right\}^\rho \\ &= \bar{u} \left[\left(\frac{1}{p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}} \right) \left(p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)} \right) \right] = \bar{u} \blacksquare\end{aligned}$$

- Unicidad: note que la demanda hicksiana es una función.

Exercise 35 Compruebe las propiedades de las demandas compensadas de los sustitutos, complementarios y las correspondientes a la función máximo.

3.2.3 Propiedades de la función de gasto

Proposition 36 Suponiendo que $u(\cdot)$ es una función continua que representa una relación de preferencias localmente no saciadas definidas en el conjunto de consumo X , la función de gasto $e(p, \bar{u})$ es

1. Homogénea de grado 1 en p .²²
2. Estrictamente creciente en \bar{u} .²³
3. No decreciente en p_ℓ .²⁴
4. Cóncava en p .²⁵
5. Continua en p y \bar{u} .²⁶

22

Proposition 37 Proof. Como se dijo antes, si multiplicamos todos los precios por una constante la canasta óptima será la misma, llámémosla $x^h(p, \bar{u})$. Como la función a minimizar ahora es $\alpha p \cdot x$, entonces $e(\alpha p, u) = \alpha p \cdot x^h(p, \bar{u}) = \alpha e(p, u)$. Esto quiere decir que el gasto mínimo también se multiplicará por esa constante. ■

²³**Proof.** Si esta no fuera estrictamente creciente en u un individuo podría tomar una canasta que valiera lo mismo y con la cual alcanzara una mayor utilidad, pero eso contradice la insaciabilidad local. ■

²⁴**Proof.** Suponga que hay por lo menos un precio de un bien es mayor. Esto implicará que el gasto ahora fuera por lo menos igual al de antes (será igual si del bien que tiene el precio más alto, no se consume nada). Recuerde que la pendiente de la isogasto cambia y para lograr las condiciones de primer orden debo cambiar la composición de la canasta, esto llevará a que gaste más para poder cumplir la restricción. ■

²⁵**Proof.** Para demostrar la concavidad fije un nivel requerido \bar{u} y sea $p'' = \alpha p + (1 - \alpha)p'$. Suponga que x'' , x' y x son las canastas óptimas al minimizar el gasto cuando los precios son p'' , p' y p , respectivamente. Entonces

$$e(p'', \bar{u}) = p'' \cdot x'' = \alpha p \cdot x'' + (1 - \alpha)p' \cdot x'' \geq \alpha e(p, \bar{u}) + (1 - \alpha)e(p', \bar{u})$$

La última desigualdad se da porque la definición de gasto mínimo implica que $p \cdot x'' \geq e(p, \bar{u}) = p \cdot x$ y $p' \cdot x'' \geq e(p', \bar{u}) = p' \cdot x'$. ■

²⁶**Proof.** La continuidad se da porque la función objetivo es continua así como las demandas hicksianas. ■

La primera propiedad no dice que ante un aumento de la misma proporción en todos los precios de los bienes, el gasto que se debe hacer para mantener el mismo nivel de utilidad se aumentará en esa misma proporción. Por su parte, la segunda propiedad implica que si se quiere alcanzar un nivel de utilidad mayor al inicial se tendrá que incurrir en un gasto mayor al inicial. La tercera propiedad nos dice que el gasto que se hace en los bienes tendrá que ser por lo menos el mismo que el inicial si el precio de los bienes aumenta.

La cuarta propiedad, la concavidad de la función de gasto, es una propiedad que puede resultar bastante intuitiva. Suponga una situación inicial a unos precios p cuya demanda óptima es x . Ahora bien, el aumento del precio de uno de los bienes originará un aumento del gasto mínimo como lo sugiere la propiedad 3; sin embargo, también se generará una reasignación en la proporción de consumo de los bienes disminuyendo la cantidad consumida del bien cuyo precio aumentó. Si de nuevo se da un aumento de la misma proporción en el precio de la misma mercancía, de nuevo se dará un aumento en el gasto pero esta vez de menor magnitud dado que las cantidades consumidas de tal mercancía ya habían disminuído. Esto se ve representado en la concavidad de la función ya que la pendiente, al graficar el gasto mínimo contra dicho precio, es positiva pero cada vez menos inclinada (véase figura 3.6). Por último, la continuidad de la función de gasto indica que en esta no deben haber cambios grandes cuando hay pequeños cambios en los precios de los bienes o de la utilidad mínima requerida.

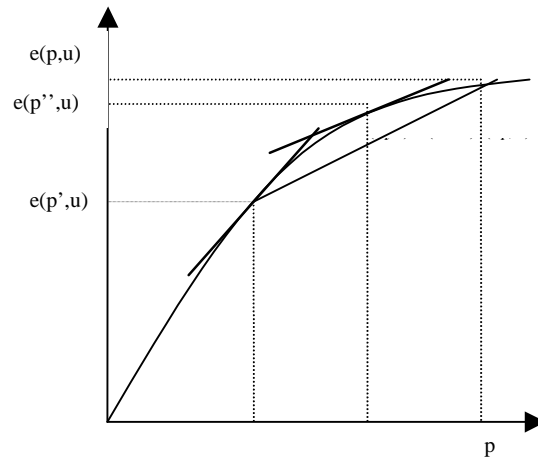


Figure 3.6: Concavidad de función de gasto mínimo

Example 38 *Continuando de nuevo con la función de gasto derivada de la CES, ahora comprobaremos que se cumplen las propiedades de esta función*

1. Homogénea de grado 1 en p

$$\begin{aligned} e(tp, \bar{u}) &= te(p, \bar{u}) \\ &= \bar{u} \left((tp_1)^{\rho/(\rho-1)} + (tp_2)^{\rho/(\rho-1)} \right)^{(\rho-1)/\rho} \\ &= t\bar{u} \left(p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)} \right)^{(\rho-1)/\rho} = te(p, \bar{u}) \blacksquare \end{aligned}$$

2. Estrictamente creciente en \bar{u}

$$\begin{aligned} \frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial \bar{u}} &> 0 \\ \frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial \bar{u}} &= \left(p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)} \right)^{(\rho-1)/\rho} > 0 \blacksquare \end{aligned}$$

3. No decreciente en p_ℓ

$$\frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial p_\ell} \geq 0$$

4. Cóncava en p : la Matriz Hessiana es semidefinida negativa. Ejercicio

5. Continua en p y \bar{u} : como es diferenciable es continua.

Exercise 39 Compruebe las propiedades de la función de gasto de los sustitutos, complementarios y la correspondiente a la función máximo.

3.3 Dualidad

En esta sección será de interés exponer los vínculos entre el problema de minimización del gasto y la maximización de la utilidad. Para ello la siguiente proposición será el eje central.

Proposition 40 Si $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa unas preferencias localmente no saciadas, definidas en el conjunto de consumo X , siendo el vector de precios $p \gg 0$ entonces:

1. Si x^* es el óptimo del PMU cuando la riqueza es $w > 0$, entonces x^* es óptimo en el PMG cuando el nivel de utilidad requerido es $u(x^*)$. Más aún, el nivel del gasto mínimo en ese PMG es exactamente w .²⁷

²⁷**Proof.** Suponga que x^* no es óptimo en PMG, pero sí en PMU, con el nivel de utilidad requerido igual a $u(x^*)$ entonces existe un x' tal que $u(x') \geq u(x^*)$ y $p \cdot x' < p \cdot x^* \leq w$. Por la no saciabilidad local se puede definir un x'' muy cercano a x' tal que $u(x'') > u(x')$ y $p \cdot x'' < w$, pero esto implicaría que $x'' \in B_{p,w}$ y que $u(x'') > u(x^*)$ y esto va en contravía de que x^* sea óptimo en el PMU, entonces x^* debe ser óptimo en el PMG cuando el nivel de utilidad requerido sea $u(x^*)$ y el gasto mínimo debe ser $p \cdot x^*$. Por último, dado que x^* resuelve el PMU cuando la riqueza es w entonces por ley de Walras $p \cdot x^* = w$ ■

2. Si x^h es el óptimo en el PMG cuando el nivel de utilidad requerido es $\bar{u} > u(0)$, entonces x^h es óptimo en el PMU cuando la riqueza es $p \cdot x^h$. Más aún, el nivel maximizador de la utilidad en este PMU es exactamente \bar{u} .²⁸

La anterior proposición muestra la relación que hay entre las funciones de utilidad indirecta, gasto mínimo, demandas marshalliana y hicksiana, estas relaciones son resumidas en la figura 3.7 y sus implicaciones serán expuestas a continuación.

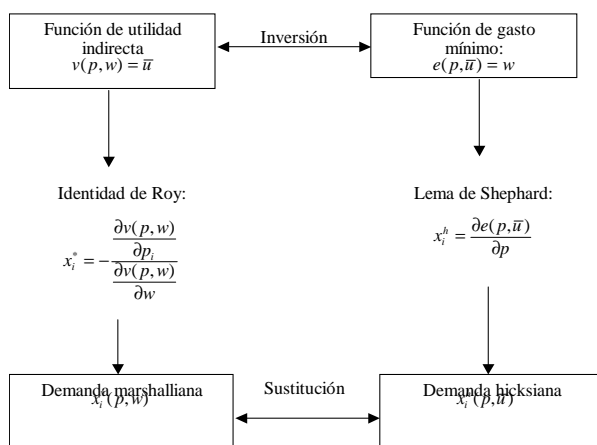


Figure 3.7: Relación entre el PMU y el PMG

3.3.1 Función de Utilidad Indirecta y Función de Gasto

Mínimo

Usando la anterior proposición podemos obtener el siguiente corolario.

Theorem 41 Corollary 42 Sean $v(p, w)$ y $e(p, \bar{u})$, las funciones de utilidad indirecta y de gasto para algún individuo cuya función de utilidad es continua y estrictamente creciente. Entonces para todo $p \gg 0$, $w \geq 0$ y \bar{u} :

1. $e(p, v(p, w)) = w$
2. $v(p, e(p, \bar{u})) = \bar{u}$

²⁸**Proof.** Suponga que x^* no es óptimo del PMU, pero sí del PMG, entonces existe un x' tal que $u(x') > u(x^*)$ y que $p \cdot x' \leq p \cdot x^*$. Ahora suponga una versión reducida de x' igual a $x'' = \alpha x'$ donde $\alpha \in (0, 1)$. Por continuidad tenemos que si $\alpha \rightarrow 1$ entonces $u(x'') > u(x^*)$ y $p \cdot x'' < p \cdot x^*$, pero esto contradice la optimalidad de x^* en el PMG; entonces x^* debe ser óptimo en PMU cuando la riqueza es $p \cdot x^*$ y el nivel máximo de utilidad es $u(x^*)$. ■

Estas condiciones implican que, para cualquier vector de precios, $e(\bar{u}, p)$ y $v(p, w)$ son funciones inversas.

Example 43 *Se continuará con el uso de la función CES, partiendo de la función de utilidad indirecta:*

$$v(p, w) = w[p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}]^{(1-\rho)/\rho}$$

despejando w , se obtiene:

$$\begin{aligned} w &= v(p, w) \cdot [p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}]^{-(1-\rho)/\rho} \\ e(p, \bar{u}) &= \bar{u} \cdot [p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}]^{(\rho-1)/\rho} \end{aligned}$$

3.3.2 Demanda Marshalliana y Demanda Hicksiana

La demanda hicksiana mantiene la utilidad del consumidor fija cuando los precios varían, en contraste con la demanda marshalliana, que mantiene la cantidad de ingreso fija pero permite que la utilidad varíe. Usando la primera proposición también sabemos que:

$$x^h(p, \bar{u}) = x^*(p, w) = x^*(p, e(p, \bar{u}))$$

De igual forma, se puede obtener la demanda marshalliana a partir de la hicksiana:

$$x^*(p, w) = x^h(p, \bar{u}) = x^h(p, v(p, w))$$

Example 44 *Tomando las demandas marshallianas obtenidas de la CES y reemplazando la respectiva función de gasto mínimo por w tendremos las demandas hicksianas.*

$$\begin{aligned} x_1^*(p, w) &= \frac{w \cdot p_1^{1/(\rho-1)}}{[p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}]} \\ x_1^h &= \frac{e(p, \bar{u}) \cdot p_1^{1/(\rho-1)}}{[p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}]} \\ x_1^h &= \frac{\bar{u} \cdot [p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}]^{(\rho-1)/\rho} \cdot p_1^{1/(\rho-1)}}{[p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}]} \\ x_1^h &= \bar{u} \cdot [p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}]^{-1/\rho} \cdot p_1^{1/(\rho-1)} \end{aligned}$$

3.3.3 Demanda Hicksiana y Función de Gasto

Proposition 45 *Lema de Shephard:* $h_l(p, u) = \frac{\partial e(p, u)}{\partial p_l}$ ²⁹

Esta proposición sostiene que el cambio de la función de gasto cuando cambia el precio de la mercancía l es la demanda compensada por la mercancía l . Este resultado no es sorprendente si se tiene en cuenta que si aumentamos el precio de una mercancía el gasto aumentará en el número de unidades que tenga de la mercancía.

Example 46 *Para el caso de la función CES aplicaremos el Lema de Shephard*

$$\begin{aligned} \frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial p_\ell} &= \bar{u} \left(p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)} \right)^{-1/\rho} p_\ell^{1/(\rho-1)} \\ &= \bar{u} p_\ell^{1/(\rho-1)} \left[p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)} \right]^{-1/\rho} = x_\ell^h(p, \bar{u}) \blacksquare \end{aligned}$$

3.3.4 Demanda Marshalliana y la Función de Utilidad Indirecta

Acabamos de ver que las cantidades que minimizan el gasto pueden ser obtenidas derivando la función de gasto mínimo con respecto al precio. Esta condición no se mantiene en el caso de la maximización de la utilidad ya que la demanda marshalliana es un concepto ordinal mientras la utilidad indirecta varía según las transformaciones que se le hayan hecho a la utilidad. Es por esto que se debe hacer una corrección a tal derivada.

Proposition 47 *Identidad de Roy:* Si $v(p, w)$ es diferenciable en (p, w) y $\partial v / \partial w \neq 0$, entonces $x_\ell(p, w) = -\frac{\partial v / \partial p_\ell}{\partial v / \partial w}$; $\ell = 1, \dots, L$ ³⁰

²⁹

Proof. Si diferenciamos la función de gasto con respecto al precio tendremos que:

$$\frac{\partial e(p, u)}{\partial p_l} = h_l(p, u) + p_l \frac{\partial h_1(p, u)}{\partial p_l} + p_2 \frac{\partial h_2(p, u)}{\partial p_l}$$

Utilizando las condiciones de primer orden al minimizar el gasto tenemos que $p_l = \lambda \left[\frac{\partial u(h_1(p, u), h_2(p, u))}{\partial h_l(p, u)} \right]$ y $p_2 = \lambda \left[\frac{\partial u(h_1(p, u), h_2(p, u))}{\partial h_2(p, u)} \right]$. Al reemplazar esto en la anterior ecuación tenemos

$$\frac{\partial e(p, u)}{\partial p_l} = h_l(p, u) + \lambda \left[\frac{\partial u(h_1(p, u), h_2(p, u))}{\partial h_l(p, u)} \right] \frac{\partial h_1(p, u)}{\partial p_l} + \lambda \left[\frac{\partial u(h_1(p, u), h_2(p, u))}{\partial h_2(p, u)} \right] \frac{\partial h_2(p, u)}{\partial p_l}$$

Pero como u es fija y no se afecta ante cambios en precio, tal derivada es igual a cero y obtenemos el resultado. ■

³⁰

Proof. Sea $u = v(p, w)$. Como $v(p, e(p, u)) = u$ se mantiene para todo p , al diferenciar con respecto a p obtenemos

$$\frac{\partial v}{\partial p_l} + \frac{\partial v}{\partial w} \left(\frac{\partial e}{\partial p_l} \right) = 0$$

Example 48 En el caso de la CES y para el bien ℓ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial v / \partial p_\ell}{\partial v / \partial w} &= - \frac{w \cdot [(1 - \rho) / \rho] \cdot [p_1^{\rho / (\rho - 1)} + p_2^{\rho / (\rho - 1)}]^{(1 - 2\rho) / \rho} \cdot [\rho / (\rho - 1)] \cdot p_\ell^{1 / (\rho - 1)}}{[p_1^{\rho / (\rho - 1)} + p_2^{\rho / (\rho - 1)}]^{(1 - \rho) / \rho}} \\ &= - \frac{\left(p_1^{\rho / (\rho - 1)} + p_2^{\rho / (\rho - 1)} \right)^{\frac{(1 - \rho)}{\rho} - 1} w p_\ell^{1 / (\rho - 1)}}{\left(p_1^{\rho / (\rho - 1)} + p_2^{\rho / (\rho - 1)} \right)^{(1 - \rho) / \rho}} \\ &= \frac{w p_\ell^{1 / (\rho - 1)}}{\left(p_1^{\rho / (\rho - 1)} + p_2^{\rho / (\rho - 1)} \right)} = x_\ell(p, w) \blacksquare \end{aligned}$$

3.4 Extensiones

3.4.1 Efecto de los impuestos

Una de las formas en que se podría evaluar el efecto que tienen los impuestos sobre el bienestar de los consumidores es analizando las consecuencias que generan sobre su nivel de utilidad. Con el siguiente ejemplo se argumentará porqué un impuesto de suma fija es menos nocivo para la utilidad de una persona que un impuesto a la cantidad en el caso que la economía este compuesta de bienes igualmente deseables.

Example 49 Tomando la función CES que se trabajó anteriormente y suponiendo que $\rho \rightarrow 0$; es decir, una Cobb-Douglas de la forma

$$u(x_1 x_2) = x_1 x_2$$

La utilidad indirecta será

$$v(p, w) = w^2 / (4p_1 p_2)$$

Ahora supongamos que $m = 2$, $p_1 = 1/4$ y $p_2 = 1$; así, la utilidad máxima sería 2 y consumiría 4 unidades de la primera mercancía y 1 de la segunda mercancía.

Supongamos que el gobierno quiere recaudar 0.5 pesos y puede hacerlo a través de un impuesto de suma fija o a través de un impuesto a la cantidad. Si lo hace a través de suma fija el individuo verá su utilidad disminuida a 1.5.

Ahora, si lo hiciera con un impuesto a la cantidad de 0.25 sobre x_1 recaudaría los mismos impuestos ya que las compras de dicho bien se reducirían a 2. Sin embargo, la máxima utilidad que podría lograr así sería de 1.41.

como $\frac{\partial e}{\partial p_i} = h_i(p, u)$ y $x_i(p, w) = h_i(p, v(p, w))$, entonces tenemos que

$$\frac{\partial v}{\partial p_i} + \frac{\partial v}{\partial w} x_i = 0$$

Despejando x_i obtenemos el resultado. ■

De esta forma se muestra que en este caso, un impuesto de suma fija afecta menos la utilidad de un individuo que un impuesto a la cantidad. Lo anterior se da porque con el primero únicamente se afecta el poder adquisitivo de los consumidores; mientras que con el segundo, además de reducir el poder adquisitivo también se ve afectada la relación de precios entre los bienes, lo que resulta más perjudicial porque cambia la tasa a la que estos se intercambian en el mercado.

3.4.2 Recuperación de las Preferencias

Se dice que existe *dualidad* entre las funciones de utilidad indirecta y de gasto en el sentido de que cada una de estas funciones puede describir las preferencias del consumidor de la misma forma, siempre que se cumplan ciertas condiciones de regularidad. La característica esencial de la dualidad es el cambio de variables. El *PMU* y el *PMG* se consideran problemas duales porque la restricción en el *PMU* es la función objetivo en el *PMG* y viceversa. Esto puede verificarse analizando la solución gráfica a los dos problemas, ya que en ambos casos, en el óptimo, se cumple la condición de tangencia:

$$\frac{UMg_1}{UMg_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Las preferencias y la utilidad están originalmente definidas sobre las cantidades de bienes como objetos de elección y esta formulación primal de u en terminos de x es la mas obvia. Si el consumidor enfrenta una restricción presupuestal lineal, la posición de esta, definida por p y w , determina la máxima utilidad alcanzable. Así u se puede considerar como una función de p y w (utilidad indirecta $v(p, w)$), o inversamente, w como una función de p y u (función de gasto $e(p, \bar{u})$).

Ciertas manipulaciones transfieren la información sobre las preferencias contenida en $u(x)$ en las formas indirectas de $v(p, w)$ y $e(u, p)$. Con restricciones lineales y convexidad, las preferencias pueden ser representadas por sus tangentes en cada punto, de tal forma que la información originalmente contenida en $u(x)$ es reescrita en las funciones $v(p, w)$ y $e(u, p)$. Por lo tanto de cualquiera de estas dos se puede recuperar la función de utilidad directa³¹. Si las preferencias no fueran convexas, los tramos no convexas no serían reescritos en el problema dual, y por lo tanto no serían recuperables.

En el trabajo empírico, esto es de gran conveniencia ya que es relativamente facil pensar en especificaciones para $v(p, w)$ y $e(p, \bar{u})$, y estas pueden ser convertidas en demandas por diferenciación (*Lema de Shephard* o usando la *Identidad de Roy*). En el trabajo teórico, el teorema fundamental de la dualidad permite obtener una solución directa al problema de examinar bajo qué circunstancias se pueden obtener las preferencias a partir de un conjunto dado de funciones de demanda. Usualmente este problema es llamado el *Problema de Integrabilidad*.

El problema se puede describir de la siguiente manera. Suponga que de alguna forma se ha determinado la función de gasto mínimo del consumidor, pero

³¹ Este el teorema fundamental de la dualidad o teorema de dualidad de Uzawa Shephard.

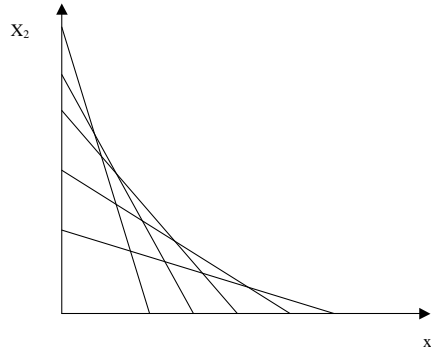


Figure 3.8: Recuperación de las preferencias

que no se conoce la función de utilidad correspondiente (de la que sólo se sabe que es continua). ¿Cómo se puede utilizar esta función de gasto (que satisface las propiedades anteriores) para construir la función de utilidad subyacente $u = u(x)$?

La función de utilidad $u = u(x)$ es equivalente al conjunto de curvas de indiferencia $\{x : u(x) = \bar{u}\}$ o a la familia de conjuntos de canastas débilmente preferidas (contorno superior CS de \bar{u}). Para cualquier $x \in X$, la función de gasto puede ser utilizada para construir una aproximación de este conjunto.

Escoja un vector de precios $p^1 \gg 0$, y grafique la curva de isogasto correspondiente $\{x \in X : p^1 \cdot x = e(p^1, \bar{u})\}$. El contorno superior debe intersectar este conjunto porque $e(p^1, \bar{u}) \equiv \min_x \{p^1 \cdot x : x \in CS\}$. De hecho el contorno superior está contenido en el conjunto de canastas $\{x : p^i \cdot x \geq e(p^i, \bar{u})\}$, es decir aquellas cuyo gasto es mayor o igual a $e(p^1, \bar{u})$. El procedimiento anterior debe repetirse con varios vectores de precios $p^i \gg 0$. Evidentemente, el contorno superior debe ser subconjunto de cada uno de los conjuntos $\{x : p^i \cdot x \geq e(p^i, \bar{u})\}$, de tal forma que el contorno superior, denotado por $L(\bar{u})$ puede hallarse como:

$$L(\bar{u}) \subset \bigcap_{p \gg 0} \{x : p \cdot x \geq e(p, \bar{u})\}$$

Una vez que la aproximación del contorno superior ha sido construida, la función de utilidad $u(x)$ puede aproximarse a través de:

$$\begin{aligned} u(x) &\equiv \max_{\bar{u}} \{\bar{u} : x \in L(\bar{u})\} \\ &= \max_{\bar{u}} \{\bar{u} : p \cdot x \geq e(p, \bar{u}) \text{ para todo } p \gg 0\} \end{aligned}$$

A pesar de que gráficamente la recuperación de las preferencias a partir de la función de gasto puede ser trivial (véase figura 3.8), analíticamente se requiere del *Teorema de Integrabilidad* para recuperar la función de utilidad directa, y este es un tema que no se abordará en este curso.

Chapter 4

Funciones de Demanda

(Resumen de: Cap 4, 5 y 6 Nicholson, Cap 6, 8 y 10 Varian Intermedio, Cap 8 Varian Avanzado, Cap 3 MasColell, Sección 2.5 Deaton & Muellbauer, Cap 1 y 2 Jehle y Renny).

En este capítulo nos concentraremos en las funciones de demanda, primero analizando las demandas individuales, tanto la marshaliana como la hicksiana y su relación, y luego la demanda agregada. En ambos casos discutiremos los efectos que tienen los cambios de las variables exógenas en estas demandas, sus repercusiones en el bienestar de los individuos y sus propiedades. Para examinar la respuesta de la demanda del consumidor ante cambios en algunas variables se utilizará la metodología de *Estática Comparativa*. Se llama “comparativa” porque se comparan dos situaciones: antes y después de la variación del entorno económico, y “estática” porque no interesan los procesos de ajuste que entraña el cambio de una elección por otra, sino sólo la elección final del equilibrio.

4.1 Demandas individuales

En esta sección estudiaremos los distintos efectos que tienen las variables exógenas sobre las demandas del individuo. Esto nos permitirá analizar la estructura de cada una de estas demandas y su relación entre ellas a través de la ecuación de Slutsky.

4.1.1 Demanda Marshaliana

La función de demanda marshaliana $x(p, m)$ del consumidor asigna un conjunto de canastas de consumo escogidas para cada par de precios e ingreso. Por lo tanto, nos concentraremos en los efectos que estas variables tienen sobre la demanda. Al analizar dichos efectos podremos distinguir distintos tipos de mercancías. En primera instancia, veremos el papel que juega el ingreso en la determinación de las canastas óptimas; luego, veremos el papel del precio de la mercancía que se analiza; y por último, cómo el precio de otras mercancías

afectan las demandas de una mercancía. Para este análisis utilizaremos tanto cambios absolutos como las elasticidades, teniendo en cuenta que esta última es una medida de sensibilidad que no depende de las unidades en las que las variables estén definidas, esta se halla dividiendo la variación porcentual de la cantidad demandada entre la variación porcentual de la variable (precio o ingreso).

Efectos del Ingreso

La variación de la demanda ante cambios en el ingreso se conoce como el efecto ingreso y se denota por la derivada $\frac{\partial x(p,w)}{\partial w}$. Si $\frac{\partial x_l^*(p,w)}{\partial w}$ es positivo, significa que ante aumentos en la renta, la demanda del bien l aumenta, y por lo tanto es un bien *normal* ya que tiene el comportamiento ordinario que se espera que ocurra cuando la renta aumenta. Si $\frac{\partial x_l^*(p,w)}{\partial w}$ es negativo, se trata de un bien *inferior*. Se caracteriza porque a medida que aumenta la riqueza el consumidor quiere demandar menos de ese bien.

Ahora bien, a niveles bajos de ingreso un bien puede ser normal (ej. Paneta), pero a medida que se superan ciertos niveles de ingreso es posible que se tenga acceso a otros bienes que antes no eran asequibles (e.g. azúcar) y que por lo tanto disminuya el consumo de los primeros, volviéndose inferior. La suposición de demanda normal es factible si las mercancías son grandes agregaciones (ej. comida). Pero si están muy desagregadas (ej. clase de zapatos) entonces, debido a la sustitución de bienes de más alta calidad cuando aumenta el ingreso, los bienes se vuelven inferiores en algún nivel de ingreso.

Este efecto también puede analizarse gráficamente. Si los precios se mantienen constantes y hay un incremento en la renta se presenta un desplazamiento paralelo de la restricción presupuestal hacia afuera y se alcanza una nueva cesta óptima demandada en una curva de indiferencia más alta. Una herramienta que permite observar las respuestas de la demanda a cambios en el ingreso, es la *curva oferta-renta* o la *senda de expansión de la renta*. Esta se obtiene al unir las cestas óptimas demandadas a diferentes niveles de renta (manteniendo los precios constantes) en el espacio de mercancías (Ver figura 4.1). Si en una economía de dos mercancías, ambos son normales, la pendiente de la senda de expansión de la renta es positiva.

De hecho, si las preferencias son homotéticas, las sendas de expansión de la renta son líneas rectas de pendiente positiva que parten del origen, como por ejemplo el caso de los sustitutos perfectos, complementarios perfectos y preferencias Cobb-Douglas. ¿Puede verificar la anterior afirmación? En el caso de las preferencias cuasilineales las curvas de indiferencia son versiones desplazadas verticalmente (u horizontalmente) de una curva de indiferencia. Si tenemos la función de utilidad $u(x) = v(x_1) + x_2$, si una curva de indiferencia es tangente a la recta presupuestaria en la cesta (x_1^*, x_2^*) , las otras curvas deben ser tangentes a restricciones paralelas en $(x_1^*, x_2^* + k)$ para cualquier $k > 0$. De esta manera, el cambio en la renta no altera la demanda del bien 1, por lo tanto para esta mercancía no hay una curva de Engel. En este caso la senda de expansión de la renta es una línea vertical como se muestra en la figura 4.2.

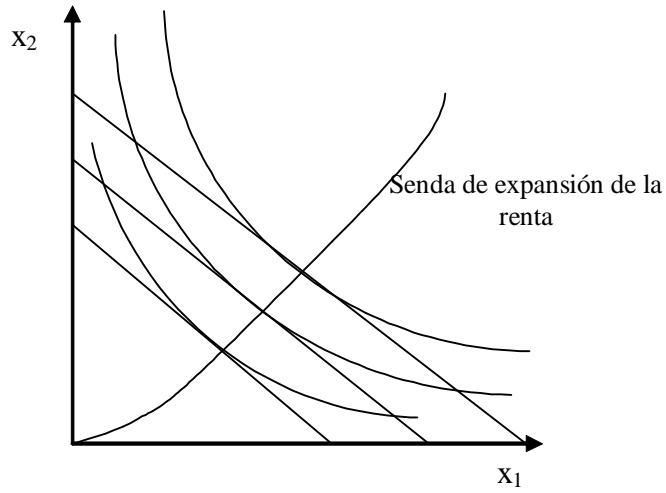


Figure 4.1: Senda de expansión de la renta

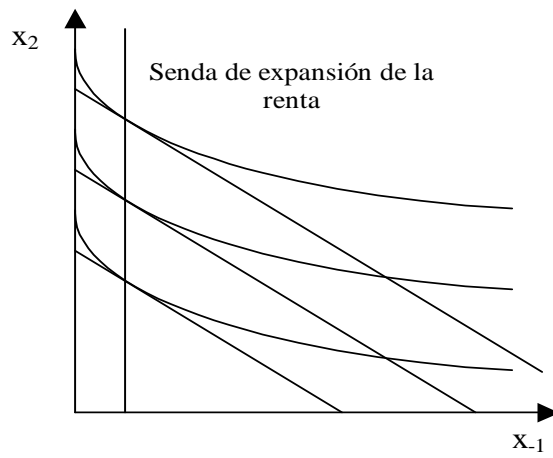


Figure 4.2: Senda de Expansión de la Renta cuando las preferencias son cuasi-lineales

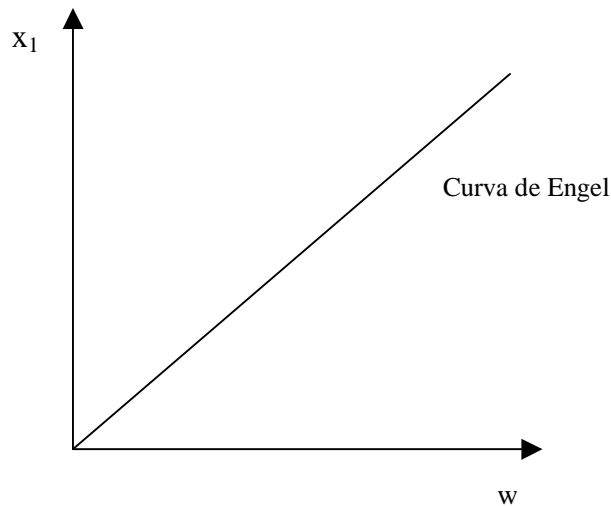


Figure 4.3: Curva de Engel de una mercancía normal.

A partir de la senda de expansión de la renta se puede derivar la *Curva de Engel*. Esta relaciona la cantidad consumida de un bien con los diferentes niveles de ingreso, manteniendo los precios constantes (Ver figura 4.3). Evidentemente, si el bien es normal, la pendiente de la *Curva de Engel* es positiva; si el bien es inferior, la pendiente es negativa. En el caso de preferencias homotéticas la curva de Engel será una línea recta partiendo del origen, tal como se muestra en 4.3. Si las preferencias son cuasilineales, como en el caso mostrado anteriormente, la curva de Engel será una línea horizontal pues la demanda no depende del ingreso.

Si se dan cambios en los precios o en las preferencias, la curva de Engel sufrirá desplazamientos dependiendo del efecto que el cambio tenga. Por ejemplo, si el aumento de precio lleva a una disminución de la demanda, la curva de Engel representada en la figura 4.3 tendrá una pendiente menor. Lo contrario sucederá si el aumento del precio lleva a un aumento de la demanda. También si el bien se vuelve más deseable, la curva de Engel tendrá mayor pendiente.

Example 50 En el caso de una función de utilidad Cobb-Douglas $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$, la demanda marshalliana por la mercancía 1 viene dada por $x_1(p, w) = \frac{\alpha w}{(\alpha + \beta)p_1}$. Note que si pintamos la curva de Engel, la pendiente de esta será $\frac{\alpha}{(\alpha + \beta)p_1}$. De esta forma, ante aumentos de p_1 o disminuciones de α , la pendiente disminuirá.

Elasticidad Ingreso (Renta) de la Demanda La *elasticidad ingreso de la demanda* indica la variación porcentual en la demanda causada por un cambio del 1% en la renta, e indica la sensibilidad de la demanda ante cambios en el

ingreso:

$$\varepsilon_I = \frac{w}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial w}$$

Evidentemente, el signo de esta elasticidad depende del signo de la derivada $\partial x/\partial w$; si esta derivada es positiva, el bien es normal y la elasticidad ingreso es positiva; si es negativa, el bien es inferior y la elasticidad ingreso es negativa. En el caso de que el bien sea normal pueden presentarse dos casos:

1. $0 < \varepsilon_I < 1$: En este caso, un aumento en el ingreso causa un aumento en menor proporción en la demanda y por lo tanto el bien es *necesario*.
2. $\varepsilon_I > 1$: Un aumento en el ingreso causa un aumento en una proporción menor en la demanda del bien, así que se trata de un *bien de lujo*.

Engel fue el primero de hablar de estos conceptos. Basado en una muestra de 153 familias belgas en 1857, realizó una generalización empírica sobre la conducta de los consumidores. Allí observó que la proporción de gasto total que se dedica a los alimentos decrece entre más ingreso tenga la familia. Es decir, los alimentos son un bien necesario cuyo consumo aumenta menos deprisa que la renta. Esto se ha comprobado a lo largo de los años, incluso en estimaciones para Colombia donde se corroboran tales resultados (Ramírez, Muñoz y Zambrano, 2005).

Note que en el caso de preferencias homotéticas la elasticidad ingreso de la demanda es uno, mientras que en el caso de las preferencias cuasilineales mencionado anteriormente esta elasticidad es cero.

Efectos de su propio precio

La demanda de un bien responde a cambios en el propio precio y en los precios de los otros bienes. Así que también podemos preguntarnos la variación de los niveles de consumo de varias mercancías cuando cambian estos precios. La derivada $\frac{\partial x(p,w)}{\partial p_i}$ recoge esta variación y se conoce como el efecto precio de p_i en la demanda del bien. Aunque sea natural pensar que una caída en el precio del bien llevará al consumidor a comprar más de él, la situación contraria no es una imposibilidad económica. Es posible encontrar preferencias regulares, en las que el aumento del precio de un bien provoque el aumento de su cantidad demandada; este tipo de bienes se llaman *Bienes Giffen*. En este caso $\frac{\partial x(p,w)}{\partial p_i} > 0$.

Los bienes de baja calidad pueden ser bienes Giffen para los consumidores de bajos ingresos. Por ejemplo, imaginen que un consumidor pobre inicialmente satisface sus requerimientos alimenticios con papas porque son la manera más barata de evadir el hambre. Si el precio de las papas cae, el puede comprar otra clase de alimentos más deseables que también le quitarán el hambre. Por lo tanto su consumo de papas disminuirá. Note que el mecanismo que lleva a que las papas sean un bien Giffen involucra consideraciones de bienestar. Cuando el

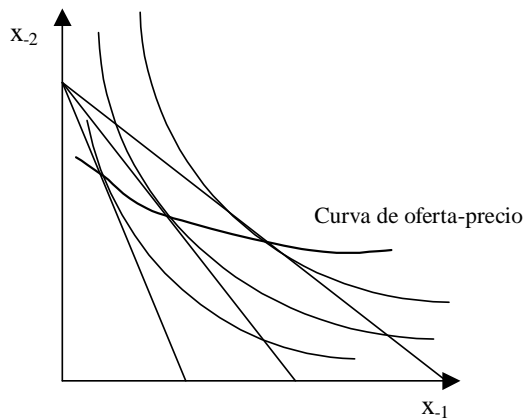


Figure 4.4: Curva de oferta-precio

precio de las papas cae, el consumidor es efectivamente más rico (porque tiene más poder de compra) y por eso compra menos papas.

Una representación útil de la demanda del consumidor a diferentes precios es llamada como curva de oferta - precio y se representa en el espacio de consumo. La *curva oferta precio* es la unión de las cestas óptimas demandadas obtenidas al variar sucesivamente el precio de un bien, manteniendo los demás precios y el ingreso constante (ver figura 4.4).

A partir de esta puede derivarse la curva de demanda, que muestra el nivel de consumo óptimo de un bien, correspondiente a cada valor de p_i , cuando los demás parámetros permanecen constantes. En la figura 4.5 se presenta gráficamente la intuición de la demanda marshalliana. En la parte de arriba se observa el problema de elección cuando existen dos bienes y se da un cambio en el precio del bien x_1 de p_1 (en cuyo caso el consumidor demandaría la cantidad $x^*(p, w)$) a p'_1 (donde la cesta óptima sería $x^*(p', w)$). En la gráfica de abajo se muestra la función de demanda que subyace del problema de elección del bien x_1 , en cuyos ejes se presenta la cantidad demandada a los distintos precios (cuando p_1 la cantidad que se demanda del bien 1 es $x_1^*(p_1, p_2, w)$ y cuando el precio es p'_1 es $x_1^*(p'_1, p_2, w)$) y la curva de demanda será la unión de esos puntos.

La función de demanda también suele desplazarse ante cambios del precio de otras mercancías, del ingreso y de las preferencias. Así, si el bien es normal y hay un cambio en el ingreso entonces la función de demanda se desplaza hacia afuera. Lo contrario ocurrirá si el bien es inferior. Por otro lado, si las preferencias del individuo cambian, de tal forma que ahora es más deseable dicho bien, entonces la curva también se desplazará hacia afuera. Un razonamiento se da cuando cambian los precios de otras mercancías.

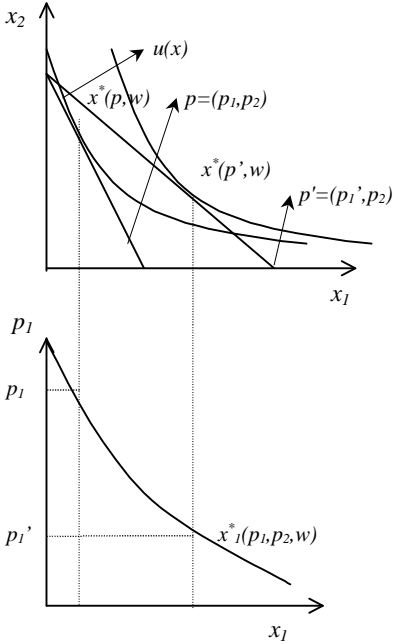


Figure 4.5: Demanda

Elasticidad precio de la demanda Mide la sensibilidad de la demanda a cambios en el precio del bien; matemáticamente va a estar definida como:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\Delta x_1/x_1}{\Delta p_1/p_1} \\ \varepsilon &= \frac{p_1 \cdot \Delta x_1}{x_1 \cdot \Delta p_1}\end{aligned}$$

Estas elasticidades dan el cambio porcentual en la demanda del bien dado el cambio porcentual en el precio del bien l . Como puede verse la elasticidad queda en función de la pendiente de la curva de demanda $\Delta x_1/\Delta p_1$; cuando se asumen cambios muy pequeños en los precios, esta pendiente puede aproximarse a través de derivadas, de tal forma que la formula resultante para la elasticidad sería:

$$\varepsilon = \frac{p_1}{x_1} * \left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1} \right)$$

Note que el signo de la elasticidad está dado por la pendiente de la demanda. De esta forma, se espera que la elasticidad precio de la demanda tenga signo negativo; sin embargo, puede darse que ésta sea positiva, en ese caso estaremos hablando de un bien Giffen. Para interpretar la elasticidad precio de la demanda pueden seguirse los siguientes parámetros:

Demanda Elástica: Cuando la elasticidad en valor absoluto es mayor a 1, significa que el cambio porcentual en la cantidad demanda fue mayor al cambio porcentual en el precio, indicando que la demanda es muy sensible.

Demanda Inelástica: La elasticidad en valor absoluto es menor a 1, indicando que la demanda es poco sensible a cambios en el precio.

Demanda de Elasticidad Unitaria: La elasticidad precio de la demanda es igual a 1 en valor absoluto. Si es unitaria y en el caso que no se trate de un bien Giffen, quiere decir que ante aumentos del 1% en el precio la demanda caerá en un 1% también.

Efectos del precio de las demás mercancías

Además de analizar los cambios de la demanda de una mercancía ante cambios en el propio precio, resulta relevante examinar cómo reacciona la demanda ante cambios en los precios de las otras mercancías. Este caso normalmente es relacionado en la literatura como efectos cruzados. Si la demanda de un bien disminuye cuando aumenta el precio de otro bien se dirá que son complementarios. Si la demanda de un bien aumenta cuando aumenta del precio del otro bien se dirá que son sustitutos. Por último, si la demanda de una mercancía no depende del precio de otra mercancía, se dirá que son independientes. Estas relaciones también pueden dibujarse en un plano donde se relacionen la demanda de una mercancía y el precio de otra mercancía.

Ya que en las demandas marshallianas el efecto de un cambio en el precio de un bien también incorpora el efecto de una disminución del ingreso puede ser posible que un bien sea sustituto del otro, pero que este sea complementario del primero o no esté relacionado; más adelante ofrecemos un ejemplo de este caso. Por lo anterior, en este contexto se habla de *bienes complementarios brutos* y de *bienes sustitutos brutos*. Más adelante refinaremos este concepto cuando se trabaje una versión análoga con las demandas compensadas. En ese caso nos referiremos a *complementarios netos* y *sustitutos netos* pues en este tipo de demandas no existe efecto ingreso y se da la simetría necesaria. En realidad es la última noción la realmente útil.

Definition 51 *Se dice que dos bienes, x_l y x_k , son sustitutos brutos si*

$$\frac{\partial x_l^*(p, w)}{\partial p_k} > 0$$

y complementarios brutos si:

$$\frac{\partial x_l^*(p, w)}{\partial p_k} < 0$$

Example 52 *Si la función de utilidad del individuo es $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$, entonces las demandas marshallianas correspondientes serán*

$$x_1^*(p, w) = \frac{p_2}{p_1}$$

$$x_2^*(p, w) = \frac{w - p_2}{p_2}$$

De tal forma que los efectos marginales de los precios cruzados estarán dados por

$$\frac{\partial x_1(p, w)}{\partial p_2} = \frac{1}{p_1} > 0$$

$$\frac{\partial x_2(p, w)}{\partial p_1} = 0$$

los cuales, claramente, no son simétricos.

Elasticidad cruzada de la demanda La elasticidad cruzada de la demanda mide la sensibilidad de la demanda a cambios en el precio de otro bien. Como puede intuirse esta medida permite establecer relaciones entre un par de bienes para saber si estos son sustitutos o complementarios.

Si hay dos bienes x_1 y x_2 , la *elasticidad cruzada de la demanda* se halla como:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{p_2}{x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_2}$$

Si esta elasticidad resulta positiva, un aumento en el precio del bien 2 causa un aumento en la demanda del bien 1, de tal forma que los bienes son sustitutos brutos. De forma análoga, si la elasticidad cruzada es negativa, los bienes son complementarios brutos.

Implicaciones de sus propiedades

La homogeneidad de grado cero en precios e ingreso y la ley de Walras implican ciertas restricciones en los efectos de estática comparativa de la demanda del consumidor con respecto a los precios y el ingreso. Consideremos primero las implicaciones de la homogeneidad de grado cero.

Sabemos que $x(ap, aw) = x(p, w)$ para todo $a > 0$ esto es, que el precio de un bien lo puedo normalizar a uno y trabajar con precios relativos. Utilizando la ecuación de Euler tendremos

$$\sum_{l=1}^L p_l \cdot \frac{\partial x_k(p, w)}{\partial p_l} + w \frac{\partial x_k(p, w)}{\partial w} \equiv 0$$

La homogeneidad de grado cero implica entonces que las derivadas de los precios y el ingreso, ponderadas por estos precios e ingreso, suman cero. Intuitivamente, esta ponderación se da porque cuando incrementamos todos los precios y el ingreso proporcionalmente, cada una de estas variables cambia en proporción a su nivel inicial.

La anterior ecuación puede enunciarse también en términos de elasticidades de la demanda con respecto al precio y el ingreso, e implica que un cambio porcentual igual en todos los precios e ingreso no llevan a cambios en la demanda.

$$\sum_{k=1}^L \varepsilon_{lk} + \varepsilon_{lw} = 0$$

Por su lado, la ley de Walras tiene dos implicaciones para los efectos precio e ingreso sobre la demanda. La ley de Walras nos dice que

$$p \cdot x^*(p, w) \equiv w$$

$$\sum_{l=1}^L p_l \cdot x_l(p, w) \equiv w$$

Diferenciando esta expresión con respecto al precio de la mercancía k encontramos la agregación de Cournot. Esta nos dice que el gasto total no puede cambiar en respuesta a cambios en el precio. En otras palabras nos dice que x_k debe ser complementario bruto de al menos un bien de tal forma que el aumento

en el gasto debido al aumento del precio debe ser balanceado disminuyendo el consumo de al menos una mercancía.

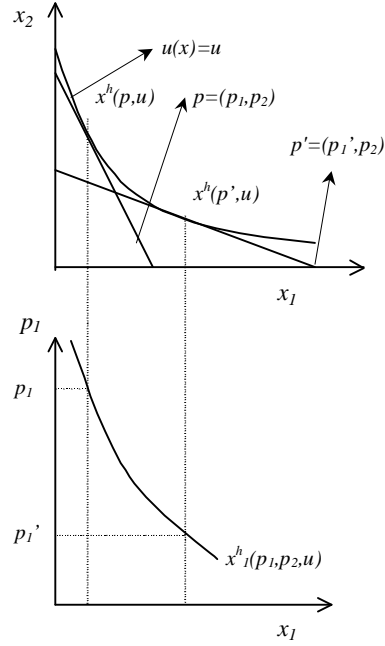
$$\sum_{l=1}^L p_l \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial p_k} + x_k(p, w) = 0$$

Ahora diferenciando la ecuación con respecto a w resulta la agregación de Engel. Es decir, que el gasto total debe cambiar en una cantidad igual al cambio en el ingreso. Esta condición nos dice que en la economía debe existir al menos un bien normal. No todos pueden ser inferiores porque ante un aumento del ingreso el individuo disminuiría las cantidades de todos los bienes lo que llevaría a que no gastará todo su ingreso.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} \left(\sum_{l=1}^L p_l \cdot x_l(p, w) \right) &\equiv \frac{d}{dw} (w) \\ \sum_{l=1}^L p_l \cdot \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial w} &\equiv 1 \end{aligned}$$

4.1.2 Demanda Hicksiana

La función de demanda hicksiana o compensada $h(p, u)$ del consumidor asigna un conjunto de canastas de consumo escogidas para cada par de precios y utilidad. Estas no son observables como las marshalianas porque dependen del nivel de utilidad, que es subjetivo. La figura 4.1.2 muestra el conjunto solución $x^h(p, \bar{u})$ para dos vectores distintos de precios. En la parte superior se tiene el *PMG* con un nivel de utilidad u y ante una variación en el precio del bien 1 de p_1 a p'_1 , cuyas demandas compensadas son $x(p, u)$ y $x(p', u)$ respectivamente. En la parte inferior se relaciona en una gráfica la cantidad compensada de demanda que el consumidor tendría a los distintos precios del bien 1.



Demanda hicksiana de la mercancía 1

En el caso de las demandas marshallianas la utilidad del individuo varía a lo largo de la curva de demanda. En este caso se supone que los precios de otros bienes y el nivel de utilidad permanecen constantes. Así, ante disminuciones del precio de un bien (y suponiendo que este es normal), el ingreso nominal debe también disminuir; de lo contrario la utilidad aumentaría. En palabras de Nicholson “se compensan los efectos producidos por la variación del precio en el poder adquisitivo”. Estas demandas poseen una estructura única que nos lleva a poderosas implicaciones.

Proposition 53 *Las siguientes condiciones se cumplen*

1. $\frac{\partial h_1(p, u)}{\partial p_k} = \frac{\partial e^2(p, u)}{\partial p_1 \partial p_k}$
2. $\frac{\partial h_1(p, u)}{\partial p_1} \leq 0^2$
3. $\frac{\partial h_1(p, u)}{\partial p_2} = \frac{\partial h_2(p, u)}{\partial p_1}$ 3

1

Proposition 54 (a) **Proof.** Se da por el Lema de Shephard. ■

2

Proposition 55 (a) **Proof.** Se da por la concavidad de la función de gasto $\frac{\partial e^2(p, u)}{\partial^2 p_k} \leq 0$. ■

3

$$4. \sum_{l=1}^L p_l \frac{\partial h_k(p, u)}{\partial p_l} = 0^4$$

La primera expresión explica el porqué se usa el término función de demanda compensada. Cuando los precios varían, el nivel de gasto adicional que hay que hacer para lograr la misma utilidad es precisamente el nivel de demanda que el consumidor compraría si el ingreso de éste fuera simultáneamente ajustado para mantener su nivel de utilidad en u (Lema de Shepard). Al derivar de nuevo está expresión encontramos que el cambio del cambio del gasto será igual a como cambia la demanda al cambiar dicho precio.

Este tipo de compensación de ingreso se conoce como la compensación de ingreso hicksiana o (variación compensada). En la figura 4.6 se presenta el caso donde se da un aumento del precio de la mercancía 2, por lo tanto la pendiente de la restricción presupuestal cambia. Como el individuo debe alcanzar la curva de indiferencia este debe aumentar su gasto, este aumento es lo que se conoce como variación compensada o de Hicks y será la cantidad $\Delta_{Hicks} = e(p', u) - w$. Haremos énfasis más adelante en esto.

La segunda condición refleja el hecho de que, ante un aumento del precio del bien, el individuo no consumirá más de este para mantener el mismo nivel de utilidad. Esto significa que la pendiente de la demanda hicksiana nunca será positiva. Esto es claro en el sentido de que un aumento del precio de la mercancía 1 aumenta la relación de precios. Como deben llegar a la misma curva de indiferencia igualando esta relación a la TMS y como esta es decreciente por ser convexa, significa que el único punto donde puede lograr esto se encuentra consumiendo una menor cantidad de la mercancía 1.

La tercera condición implica que los efectos cruzados del precio deben ser iguales entre bienes; es decir que en este caso se presenta la simetría deseada anteriormente. Esta simetría se da porque se hace una compensación de ingreso para mantener la utilidad constante. Si esta derivada es positiva se dirá que los bienes son sustitutos netos; si no es positiva diremos que son complementarios netos.

Proposition 56 (a) *Proof.* Por el Teorema de Young aplicado a la función de gasto tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e(p, \bar{u})}{\partial p_l \partial p_k} &= \frac{\partial^2 e(p, \bar{u})}{\partial p_k \partial p_l} \\ \frac{d}{dp_l} \left(\frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial p_k} \right) &= \frac{d}{dp_k} \left(\frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial p_l} \right) \\ \frac{\partial h_k(p, \bar{u})}{\partial p_l} &= \frac{\partial h_l(p, \bar{u})}{\partial p_k} \end{aligned}$$

■

4

Proposition 57 (a) *Proof.* Por la homogeneidad de grado cero de la demanda hicksiana.

■

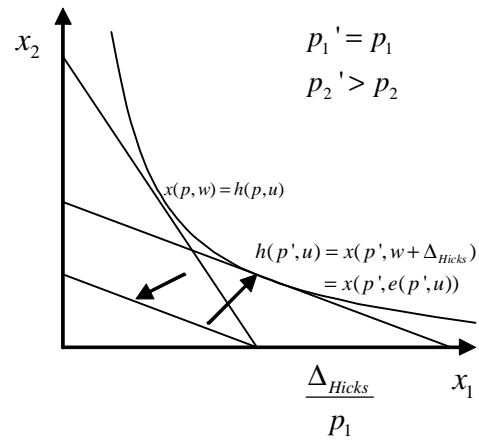


Figure 4.6: Variación compensada o de Hicks

Definition 58 *Dos bienes, x_l y x_k , son sustitutos netos si:*

$$\frac{\partial x_l^h(p, \bar{u})}{\partial p_k} > 0$$

y son complementarios netos si: $\frac{\partial x_l^h(p, \bar{u})}{\partial p_k} < 0$

Por último, la cuarta condición nos dice que para todo bien debe existir al menos un sustituto neto. Esto se da porque mientras la segunda condición nos

dice que ante el aumento del precio de una mercancía el individuo disminuirá el consumo de está y sabiendo que además debemos alcanzar cierta utilidad, entonces debe aumentarse el consumo de al menos una mercancía para suplir la disminución del consumo de la otra y así alcanzar dicho nivel de utilidad.

Example 59 *Para la función de utilidad $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$. las demandas hicksianas son:*

$$\begin{aligned} x_1^h(p, \bar{u}) &= \frac{p_2}{p_1} \\ x_2^h(p, \bar{u}) &= \bar{u} - \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \end{aligned}$$

y los efectos marginales de los precios cruzados :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1^h(p, \bar{u})}{\partial p_2} &= \frac{1}{p_1} \\ \frac{\partial x_2^h(p, \bar{u})}{\partial p_l} &= -\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \cdot \left(-\frac{p_2}{p_1^2}\right) = \frac{1}{p_1} \end{aligned}$$

4.1.3 Ecuación de Slutsky

En esta sección mostraremos cómo se relacionan las demandas hicksianas y marshallianas ante un cambio de precio. La variación del precio implica una variación no sólo de la posición de la restricción presupuestaria sino de su pendiente. Por consiguiente, el traslado a la nueva elección maximizadora de la utilidad entraña no sólo un desplazamiento a otra curva de indiferencia sino también una alteración en la TMS. Por lo tanto, cuando varía un precio, entran en juego dos efectos analíticamente distintos: el efecto sustitución y el efecto ingreso. En la realidad estos efectos no son visibles en el comportamiento del consumidor; sin embargo, son herramientas valiosas para analizar su elección. La ecuación principal que se desprende de este análisis se llamará la Ecuación de Slutsky.

Proposition 60 *Sea $x^*(p, w)$ la demanda marshalliana del consumidor. Sea \bar{u} el nivel de utilidad que el consumidor alcanza con los precios p y el ingreso w .*

Entonces:⁵

$$\frac{\partial x_i^*(p, w)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^h(p, \bar{u})}{\partial p_j} - x_j^*(p, w) \frac{\partial x_i^*(p, w)}{\partial w}, \quad i, j = 1, \dots, L.$$

$$\text{Efecto Total} = \text{Efecto Sustitución} - \text{Efecto Ingreso}$$

El efecto sustitución (ES) capta el cambio que se da en los patrones de consumo cuando el individuo iguala la TMS y la nueva relación de precios, manteniendo la misma utilidad. Así, aunque el consumidor ya no pueda acceder a la canasta inicial, si puede ubicarse en la curva de indiferencia donde se encontraba tal canasta. Suponiendo que el precio de un bien disminuye, se espera que el consumidor sustituya los bienes que ahora son relativamente más caros por el bien que bajó de precio. Por propiedades vistas anteriormente sabemos que este efecto, cuando se analiza el cambio de un bien dado un cambio de su propio precio, nunca es positivo. Asimismo, sabemos que si analizamos el ES en la mercancía j cuando cambia el precio de la mercancía i , es el mismo que si analizamos el ES en la mercancía i cuando cambia el precio de la mercancía j .⁶

Por su parte, el efecto ingreso (EI) se debe a que la variación de un precio altera necesariamente la renta real de una persona y por ende las cantidades óptimas. Así, cuando el precio de un bien disminuye, se aumenta el poder adquisitivo del consumidor de tal forma que puede aumentar las cantidades

⁵**Proof.** Partiendo de las identidades de la dualidad, es fácil demostrar cómo se obtiene la Ecuación de Slutsky:

$$x_i^h(p, \bar{u}) = x_i^*(p, e(p, \bar{u}))$$

Como esta identidad se mantiene para todo $p \gg 0$, se pueden diferenciar los dos lados de la ecuación con respecto a p_j y la igualdad se mantiene:

$$\frac{\partial x_i^h(p, \bar{u})}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^*(p, e(p, \bar{u}))}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^*(p, e(p, \bar{u}))}{\partial w} \cdot \frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial p_j}$$

Como \bar{u} es el nivel de utilidad que el consumidor alcanza cuando enfrenta p y w , puede establecerse que $\bar{u} = v(p, w)$. Por lo tanto el gasto mínimo en p y \bar{u} será igual al gasto mínimo requerido en p y $v(p, w)$. Además, se conoce que:

$$e(p, \bar{u}) = e(p, v(p, w)) = w$$

Por último se utiliza el *Lema de Shephard*, según el cual la derivada parcial del gasto respecto a p_j es la demanda Hicksiana del bien j en el nivel de utilidad \bar{u} , que a su vez es igual a $v(p, w)$:

$$\frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial p_j} = x_j^h(p, \bar{u}) = x_j^h(p, v(p, w)) = x_j^*(p, w)$$

Realizando las sustituciones necesarias en la derivada parcial hallada se obtiene:

$$\frac{\partial x_i^h(p, \bar{u})}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^*(p, w)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^*(p, w)}{\partial w} \cdot x_j^*(p, w)$$

$$\underbrace{\frac{\partial x_i^*(p, w)}{\partial p_j}}_{\text{Efecto Total}} = \underbrace{\frac{\partial x_i^h(p, \bar{u})}{\partial p_j}}_{\text{Efecto Sustitución}} - \underbrace{x_j^*(p, w) \cdot \frac{\partial x_i^*(p, w)}{\partial w}}_{\text{Efecto Ingreso}}$$

■

⁶Note que este efecto cruzado no siempre será negativo, su signo depende de si estas mercancías son sustitutos o complementarios netos.

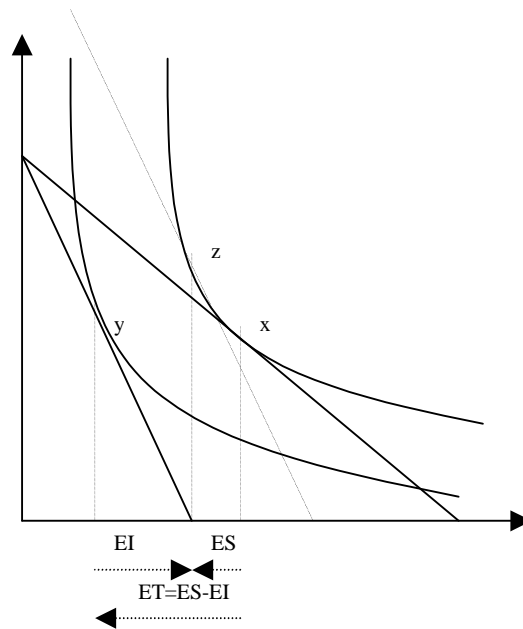


Figure 4.7: Efectos total, sustitución e ingreso

consumidas de todos los bienes (incluso de aquellos que se ahora se consideran relativamente más caros). Si se trata de un bien normal sabemos que EI es positivo, mientras que si se trata de un bien inferior sabemos que el efecto será negativo.

En la figura 4.7 se muestra el caso de un aumento del precio de la mercancía 1. Suponga que la primera decisión del individuo es x donde maximiza utilidad sujeto a una primera restricción presupuestal. Suponga que luego existe un aumento del precio de la mercancía 1, por lo tanto la restricción presupuestaria cambia teniendo ahora una pendiente mayor, luego el nuevo punto que maximizaría su utilidad es y . El efecto total está dado por la diferencia entre la canasta x y y .

Suponga que ahora quiere calcular el efecto sustitución. Por lo tanto usted compensa al individuo y le da una cantidad de ingreso de tal forma que pueda volver a alcanzar la misma curva de indiferencia del principio. Ahora, con esta compensación, la elección óptima del individuo será z . Como el paso de y a z fue a través de una compensación de ingreso, sin afectar la relación de precios, la diferencia entre estas dos canastas será el EI. Por lo tanto, el movimiento a lo largo de la curva de indiferencia, es decir, de x a z , es el ES.

Lo anterior permite que podamos inferir que, en el caso de un bien normal, la pendiente de la demanda marshalliana sea menos negativa que la pendiente

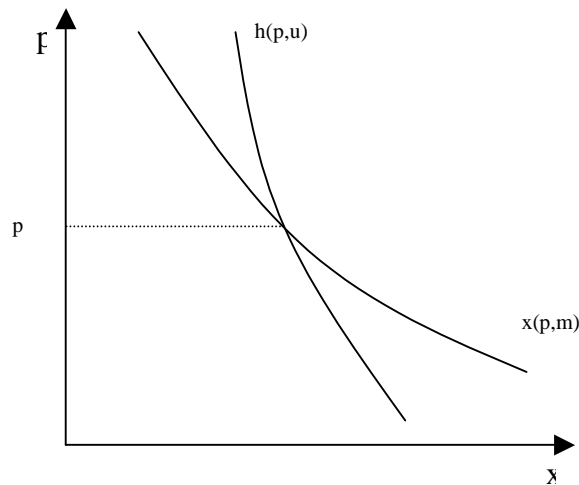


Figure 4.8: Demandas marshallianas y hicksianas en el caso de un bien normal.

de la hicksiana.⁷ Así, la curva de demanda compensada es menos sensible a las variaciones de los precios que la curva de demanda no compensada debido a que la última refleja el efecto sustitución y el efecto renta.

De una forma análoga, en el caso de los bienes inferiores, la pendiente de la marshalliana será más negativa que la de la hicksiana y por ende esta última más sensible. En el caso del bien Giffen se dice que este es muy inferior ya que el EI es tan negativo que lleva a que el efecto total sea positivo, de allí que se diga que ante aumentos del precio la cantidad demandada del bien aumentará y por lo tanto que la pendiente de la marshalliana sea positiva.

En la figura 4.8 se muestra el caso de un bien normal. Note que a los precios p las dos demandas son iguales. Sin embargo, ante un aumento de precio, la hicksiana será mayor que la demanda marshalliana ya que existe una compensación de ingreso para que logre la misma utilidad. Mientras como en la marshalliana no existe tal compensación, las demandas son menores. Por otro lado, si los precios son menores, el individuo recibe una compensación negativa de ingreso para que el individuo se mantenga en la misma utilidad, luego las hicksianas aumentan menos que las marshallianas.

⁷Note que en la ecuación de Slutsky se tiene $\frac{\partial x}{\partial p}$. Sin embargo, como en las demandas tenemos al precio en el eje y entonces el análisis debe hacerse inversamente.

Example 61 Suponga que tenemos un individuo cuya función de utilidad es $u(x_1, x_2) = x_1^{0.5} x_2^{0.5}$. Así, las demandas hicksianas y marshalianas están dadas por

$$\begin{aligned} x_1^*(p, w) &= \frac{0.5w}{p_1} \\ x_1^h(p, \bar{u}) &= \frac{\bar{u} \cdot p_2^{0.5}}{p_1^{0.5}} \end{aligned}$$

Si queremos averiguar qué pasa con estas ante un aumento de su precio tendremos, por las identidades de la dualidad, que:

$$\begin{aligned} x_i^h(p, \bar{u}) &= x_i^*(p, e(p, \bar{u})) \\ \frac{\bar{u} \cdot p_2^{0.5}}{p_1^{0.5}} &= \frac{0.5 \cdot e(p, \bar{u})}{p_1} \end{aligned}$$

derivando ambos terminos respecto a p_1 se obtiene:

$$\frac{\bar{u} \cdot p_2^{0.5} \cdot (-0.5)}{p_1^{1.5}} = -\frac{0.5 \cdot w}{p_1^2} + \frac{0.5 \cdot 0.5 \cdot w}{p_1 \cdot p_1}$$

ahora, si se tiene en cuenta que $\bar{u} = v(p, e(p, \bar{u})) = \frac{0.5 \cdot e(p, \bar{u})}{p_1^{0.5} \cdot p_2^{0.5}} = \frac{0.5 \cdot w}{p_1^{0.5} \cdot p_2^{0.5}}$, entonces tendremos la igualdad:

$$\begin{aligned} \left(\frac{0.5 \cdot w}{p_1^{0.5} \cdot p_2^{0.5}} \right) \cdot \left(\frac{p_2^{0.5} \cdot (-0.5)}{p_1^{1.5}} \right) &= -\frac{0.5 \cdot w}{p_1^2} + \frac{0.5 \cdot 0.5 \cdot w}{p_1 \cdot p_1} \\ -\frac{0.5^2 \cdot w}{p_1^2} &= -\frac{0.5^2 \cdot w}{p_1^2} \end{aligned}$$

Ahora suponga que los precios son 1 en ambos casos y que el ingreso es 10, ¿qué pasa si el precio de la mercancía 1 aumenta? La última ecuación nos permite decir que el ES será de -2.5 , lo que indica que después de la compensación el individuo disminuirá el consumo de la mercancía 1 en ese valor, obviamente debe aumentar la cantidad consumida de la mercancía 2 para mantener el mismo nivel de utilidad. Por su parte, tenemos que el EI es 2.5 , así que, ante la compensación de ingreso, el individuo aumentó su consumo por x_1 en 2.5 , esto confirma que que esta mercancía es normal. Por último y con los datos anteriores, sabemos que el ET es -5 , esta es la disminución total del consumo de dicha mercancía sin tener en cuenta la compensación.

4.1.4 Medidas de bienestar

Hasta ahora hemos explicado el comportamiento del consumidor a través de sus preferencias, esto claramente hace parte de la economía positiva. Sin embargo, esta aproximación también permite evaluar el efecto que tienen las variables exógenas sobre el bienestar del individuo, una cuestión de economía normativa.

En esta sección discutiremos distintos métodos para calcular el efecto que tiene un cambio en los parámetros exógenos sobre el bienestar de un individuo. Al respecto, las nociones de variación compensada y variación equivalente se verán como las medidas más exactas del cambio de bienestar de un individuo. Sin embargo, también veremos que estas medidas son difíciles de aplicar pues se basan en las demandas hicksianas que en la práctica no son observables. Por lo tanto, también estudiaremos el excedente del consumidor como una aproximación a la medida de los cambios de bienestar pues este último se basa en la demanda marshalliana que sí es observable, aunque resaltando que esta medición conlleva a errores del cálculo de los cambios en el bienestar.

Para el propósito de esta discusión, supondremos que conocemos las preferencias de los consumidores y que estas son racionales, continuas y localmente no saciables. También asumiremos por facilidad que las funciones de utilidad indirecta y de gasto mínimo son diferenciables. Por último, supondremos que el individuo tiene un ingreso inicial de $w > 0$ y que el vector de precios inicial es p^0 . A lo largo de esta sección nos concentraremos en los efectos que traen cambios en el precio, en este caso de p^0 a p^1 , con la salvedad de que existen otros parámetros que también pueden afectar el bienestar. Por supuesto y con la información que tenemos hasta ahora, sabremos que el cambio de precios perjudica al individuo si $v(p^1, w) - v(p^0, w) < 0$. Sin embargo, sabemos también que esta diferencia no tiene una interpretación económica pues esta puede cambiar ante transformaciones monótonas de la función de utilidad.

Para evitar este problema es útil trabajar con funciones de utilidad indirecta cuyas unidades sean dinero, estas son las llamadas funciones de utilidad indirecta métrica monetaria y se derivan de la función de gasto mínimo. Para esto recordemos que para cualquier $\bar{p} \gg 0$, $e(\bar{p}, v(p, w))$ expresa la riqueza necesaria para alcanzar el nivel de utilidad $v(p, w)$ cuando los precios son \bar{p} . Además, recuerde que la función de gasto mínimo es estrictamente creciente en la utilidad requerida. Por lo tanto, $e(\bar{p}, v(p, w))$ puede verse como una función de utilidad indirecta y $e(\bar{p}, v(p^1, w)) - e(\bar{p}, v(p^0, w))$ puede verse como el cambio en el bienestar medido en términos monetarios, de tal forma que ya no está afectada por transformaciones monótonas a la función de utilidad indirecta. Ahora bien, \bar{p} puede ser escogido como el vector inicial de precios p^0 o como el vector final de precios p^1 . Esta elección de \bar{p} nos lleva a la variación equivalente y a la variación compensada, respectivamente.

Variación equivalente y variación compensada

De acuerdo a la anterior aproximación y teniendo que $u^0 = v(p^0, w)$, $u^1 = v(p^1, w)$ y $e(p^1, u^1) = e(p^0, u^0) = w$; la variación equivalente puede definirse como:

Definition 62 Sean p^1, p^0 los vectores de precios final e inicial respectivamente,

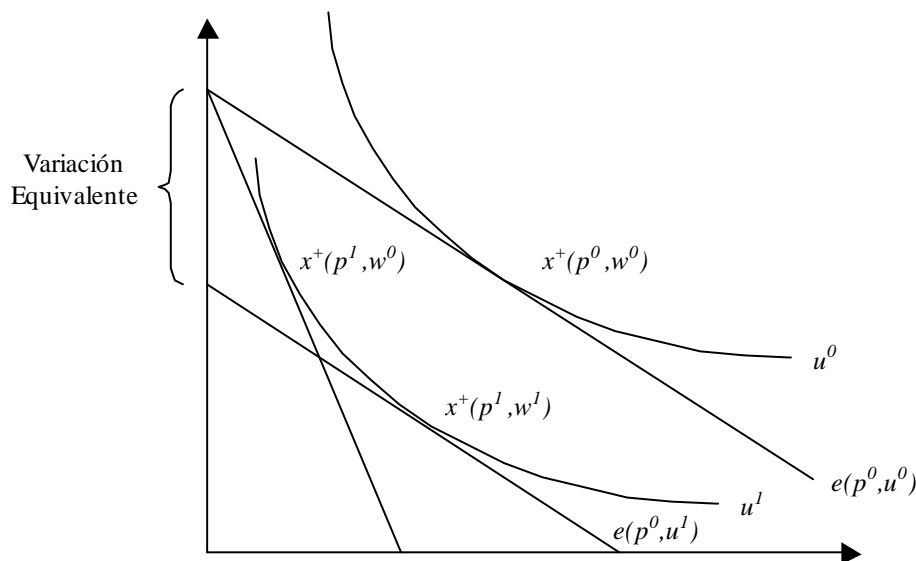


Figure 4.9: Variación Equivalente

matemáticamente la variación equivalente se define como:

$$VE = e(p^0, u^1) - e(p^0, u^0)$$

$$VE = e(p^0, u^1) - w$$

$$VE = e(p^0, u^1) - e(p^1, u^1)$$

Así, la *variación equivalente* mide el cambio en el ingreso del consumidor que sería necesario para que el individuo obtenga la utilidad final (la que alcanza cuando se modifican los precios) con los precios iniciales. En otras palabras, mide la cantidad de dinero que el individuo está dispuesto a recibir en lugar del cambio en los precios (ver gráfica 4.9). Por lo tanto, es negativo si el cambio en los precios empeora el bienestar del individuo. Además, la variación equivalente también puede expresarse en términos de la función de utilidad indirecta como $v(p^0, w + VE) = u^1$.

Por su parte, la *variación compensada* puede definirse de la siguiente manera:

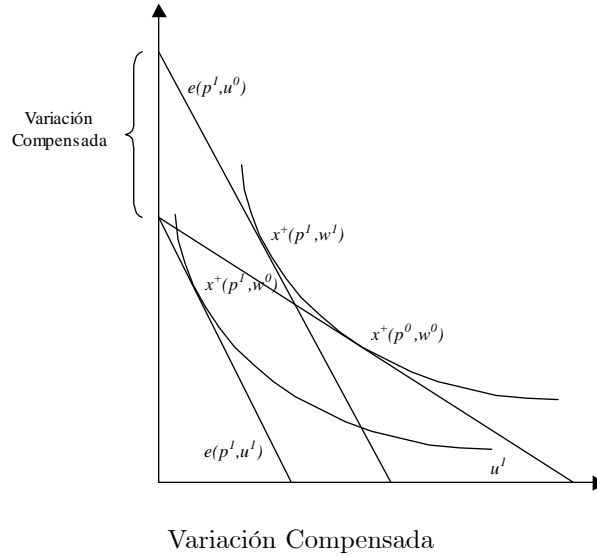
Definition 63 Sean p^1, p^0 los vectores de precios final e inicial respectivamente, matemáticamente la *variación compensada* se define como:

$$VC = e(p^1, u^1) - e(p^1, u^0)$$

$$VC = w - e(p^1, u^0)$$

$$VC = e(p^0, u^0) - e(p^1, u^0)$$

La *variación compensada* mide la cantidad de dinero que se le tendría que dar al consumidor para compensarlo por la variación del precio. En otras palabras, indica cuanto dinero se debe dar (o quitar) al consumidor para que mantenga la utilidad inicial con los nuevos precios (ver Gráfica 4.1.4). De esta forma, la variación compensada es negativa si debe pagarse al individuo una compensación positiva porque el cambio en los precios empeoró su bienestar. Esta medida puede interpretarse como el soborno (en términos negativos) que aceptaría el individuo para permitir el cambio en los precios. Este también puede expresarse como $v(p^1, w - CV) = u^0$.



Tanto la variación equivalente como la variación compensada proveen una correcta medición del cambio en el bienestar de los individuos ante cambios en los precios. Ambas serán positivas si el individuo está estrictamente mejor en la nueva situación. Sin embargo, las dos medidas no siempre coinciden, esto se da porque los vectores de precios donde las compensaciones se dan son distintos.

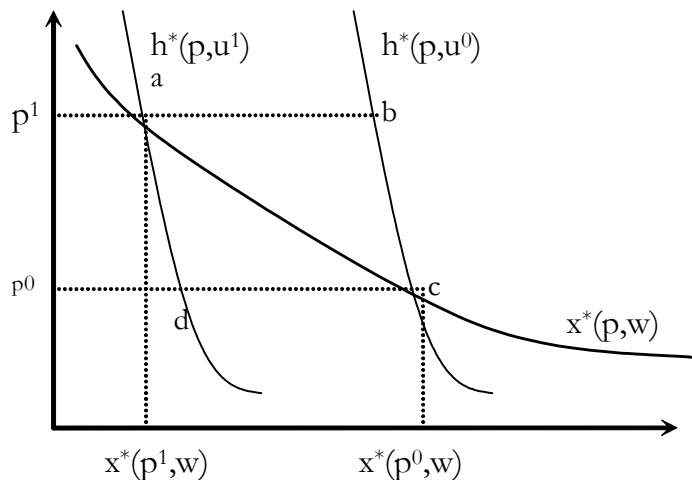
Una forma alternativa de calcular la *variación equivalente* es calcular el área a la izquierda de la demanda hicksiana correspondiente al nivel de utilidad final, comprendida entre los precios inicial y final. Teniendo en cuenta el *lema de Shephard* se sabe que $h_l(p, \bar{u}) = \partial e(p, \bar{u}) / \partial p_l$, y por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned}
 VE &= e(p^0, \bar{u}^1) - w \\
 &= e(p^0, \bar{u}^1) - e(p^1, \bar{u}^1) \\
 &= \int_{p^1}^{p^0} h_l(p, \bar{u}^1) dp_l
 \end{aligned}$$

Así como ocurre con la variación equivalente, la *variación* compensada también puede expresarse en términos de la demanda hicksiana, pero esta vez correspondiente al nivel de utilidad inicial de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} VC &= w - e(p^1, u^0) \\ &= e(p^0, u^0) - e(p^1, u^0) \\ &= \int_{p^1}^{p^0} h_l(p, \bar{u}^0) dp_l \end{aligned}$$

Así, si tenemos una mercancía normal, de tal forma que la pendiente de las demandas hicksianas es mayor a la de las marshallianas,⁸ y se presenta un aumento del precio, entonces la hicksiana a precios p^0 es mayor a la hicksiana a precios p^1 pues se debe dar una compensación para que mantenga la utilidad u^0 , es decir un aumento del ingreso, y como el bien es normal entonces el individuo aumentará la demanda por la mercancía. Por lo tanto, en este caso tendremos que la variación compensada es mayor a la variación equivalente como se puede ver en la figura ???. Lo contrario pasa si estamos analizando una mercancía inferior. Por su parte, si la mercancía no presenta efecto ingreso, por ejemplo si las preferencias son cuasilineales con respecto a otra mercancía distinta a la que estamos analizando, las dos medidas coincidirán pues las dos demandas hicksianas son iguales. Note que en este caso la demanda marshalliana también es igual a la hicksiana.



Variación equivalente y compensada

Si bien estos excedentes son medidas perfectas del cambio del bienestar de los individuos ante cambios en precios, también es cierto que para su aplicación

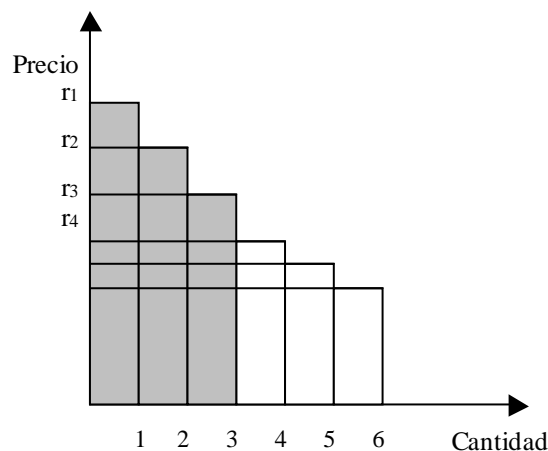
⁸Recuerde la ecuación de Slutsky.

es necesario el conocimiento de las funciones de gasto de los individuos. El conocimiento de dichas funciones puede encontrarse siempre que se tengan las funciones de utilidad de los individuos; sin embargo, estas no son directamente observables y puede ser complicada su obtención.⁹ Una aproximación comúnmente utilizada para evaluar los cambios de bienestar es a través de la variación del excedente del consumidor, obtenido a través de las demandas marshallianas.

Excedente del Consumidor

El excedente del consumidor puede definirse como la diferencia entre lo que el individuo estaba dispuesto a pagar por el consumo de una mercancía y lo que realmente pagó. Gráficamente puede observarse como el área que existe entre el precio que el individuo pagó y el corte de la demanda con el eje del precio. Esto puede interpretarse mejor analizando el caso de mercancías discretas y sus demandas marshallianas. Como se explicó en capítulos anteriores, el individuo escogerá la cantidad de una mercancía comparando las utilidades marginales con los respectivos precios. De esta forma, las demandas marshallianas muestran la disposición a pagar de un individuo por una unidad de un bien de acuerdo a la utilidad que este le genera.

La gráfica 4.1.4 muestra el beneficio que deriva el individuo si consume las tres primeras unidades; la altura r_i de cada unidad representa el *precio de reserva*, es decir el máximo precio que el consumidor está dispuesto a pagar por esa unidad adicional. Así, si el consumidor va a comprar la primera unidad está dispuesto a pagar r_1 , si va a consumir una segunda unidad sólo estará dispuesto a pagar r_2 y así sucesivamente. De acuerdo a lo anterior, *el precio de reserva indica el beneficio que el individuo deriva del consumo de cada unidad del bien*. Si se agregan los precios de reserva de las unidades consumidas, se está determinando el *excedente bruto*, es decir el beneficio total que obtiene el consumidor por el consumo de i unidades.

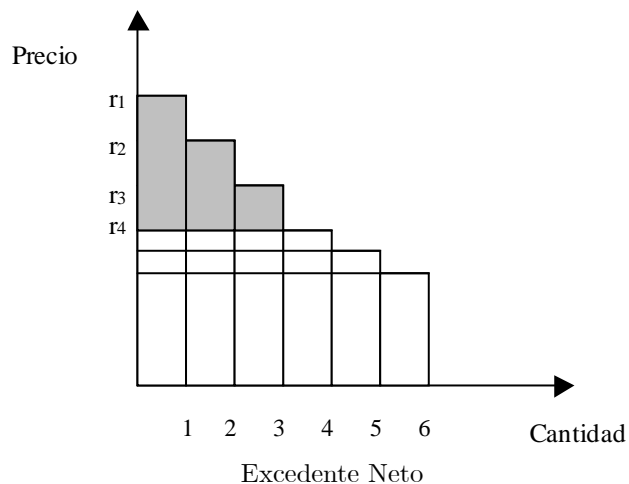


⁹En principio esto siempre es posible por el principio de integrabilidad discutido en el capítulo anterior.

Excedente Bruto

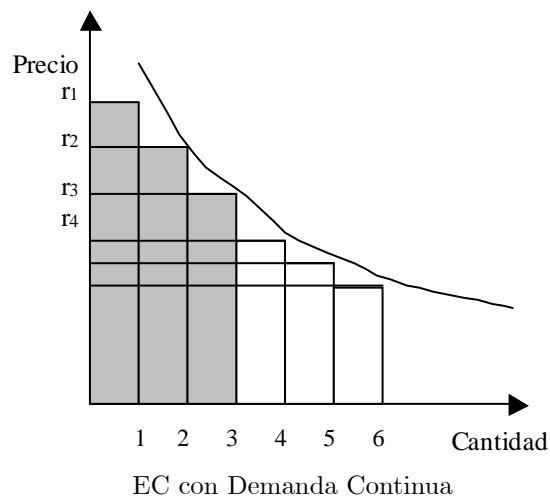
Sin embargo, para el cálculo de este excedente bruto no se está teniendo en cuenta que el consumidor debe pagar determinado precio por cada unidad consumida, de tal forma que si el precio del bien es p y se cumple que $p < r_1$, el consumidor decide comprar esa primera unidad, porque debe pagar menos de lo que el estaría dispuesto a pagar por ella, así que el beneficio monetario neto del consumidor por el consumo de la primera unidad estaría dado por la diferencia entre el precio de reserva del bien y el precio de mercado.¹⁰ Si se agregan estas diferencias para todas las unidades consumidas, se obtiene el *Excedente (neto) del Consumidor*.

En la gráfica 4.1.4, se supone que el precio de mercado es igual a r_4 , así que el consumidor decide demandar 4 unidades, y el excedente que obtiene por el consumo de estas corresponde a la suma de las diferencias entre el precio de reserva de cada unidad comprada y el precio de mercado (que es igual para todas las unidades).



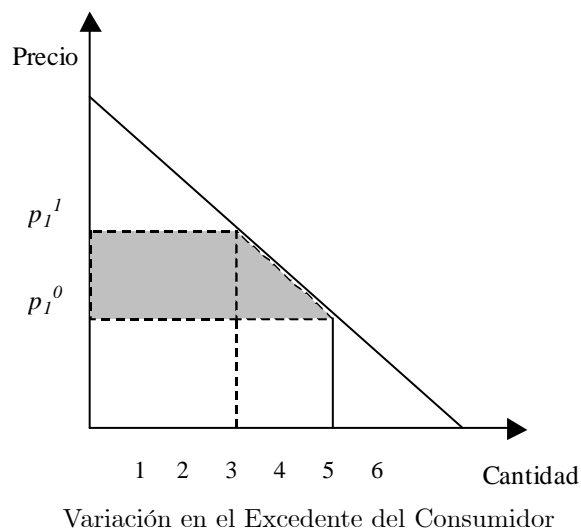
Para el caso de una demanda continua, se sigue el mismo razonamiento del caso discreto, de tal forma que el excedente del consumidor estará dado por el área comprendida entre la curva de demanda y el precio de mercado del bien (figura 4.1.4).

¹⁰Evidentemente, si esta diferencia resulta negativa para alguna unidad el consumidor no la compra, ya que esta cuesta más de lo que el está dispuesto a pagar por ella.



El *excedente del consumidor* es una herramienta útil como medida de bienestar, porque sus variaciones reflejan la pérdida (o ganancia) de beneficio en términos monetarios que debe enfrentar el consumidor por un cambio en los precios, aunque este también refleja el efecto de una pérdida relativa de ingreso.¹¹

Variaciones en el Excedente del Consumidor Si el precio de un bien aumenta de p^0 a p^1 , es de esperar que la demanda del bien disminuya, y que por lo tanto sufra una pérdida de bienestar; la magnitud de dicha pérdida puede aproximarse determinando la variación en el excedente del consumidor (ver gráfica 4.1.4).

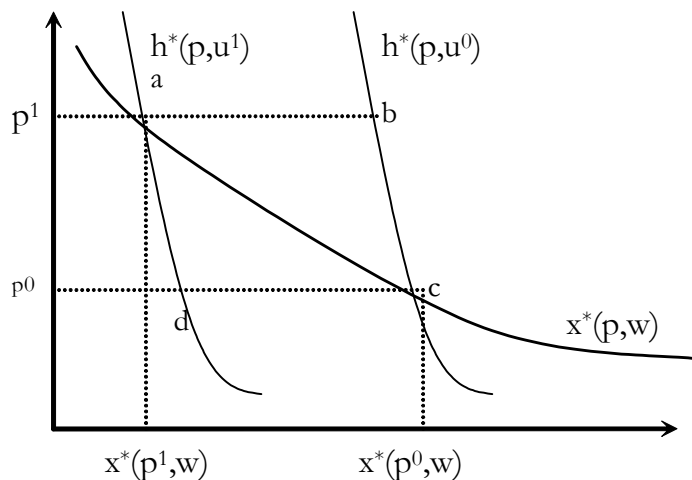


¹¹Recuerde la ecuación de Slutsky.

La pérdida de bienestar que se presenta en este caso se da por dos componentes: el primero (representado por el rectángulo) se da porque las unidades que aún se pueden consumir tienen un precio más alto, mientras que el segundo (representado por el triángulo) muestra que el bienestar disminuye porque algunas unidades que se consumían antes, ya no son compradas por el individuo. Matemáticamente el excedente del consumidor se expresa como

$$VEC = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1^*(p_1, p_2^0, w^0) dp_1$$

El excedente del consumidor analiza los cambios de bienestar a lo largo de la curva de demanda marshalliana, de tal forma que se están teniendo en cuenta dos efectos de la variación en los precios el *efecto sustitución* y el *efecto renta (ingreso)*. El primer efecto es el que se calcula en las variaciones compensadas y equivalentes, el segundo efecto es el que hace que el excedente del consumidor sea tan solo una aproximación al cambio del bienestar. Cuando las preferencias son cuasilineales VE, VC y VEC son iguales ya que se tiene que $h_1(p, u^0) = x_1(p, w) = h_1(p, u^1)$, dada la ausencia del efecto ingreso. Este caso fue analizado por Marshall (1920) aunque ya Dupuit en 1844 había hablado por primera vez de dicho concepto pero sin mayores desarrollos. En general, como puede verse en la figura 4.1.4, el excedente del consumidor calculado sobre la demanda marshalliana se encuentra entre las medidas de VC y VE, de tal forma que a cambios pequeños en los precios y si el bien ocupa una pequeña porción del ingreso, el excedente marshalliano puede constituir una buena aproximación al cambio real del bienestar.



Excedente del consumidor, VE y VC

$$\begin{aligned} p^1 bcp^0 &= VC \\ p^1 adp^0 &= VE \\ p^1 acp^0 &= VEC \end{aligned}$$

Example 64 Se hará a continuación un ejemplo con una función Cobb-Douglas

$$u(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$$

Demandas Marshallianas:

$$\begin{aligned} x_1^*(p_1, p_2, w) &= \frac{w}{2p_1}; \\ x_2^*(p_1, p_2, w) &= \frac{w}{2p_2} \end{aligned}$$

Función de utilidad indirecta

$$v(p_1, p_2, w) = \frac{w}{2p_1^{1/2} p_2^{1/2}}$$

por tanto la función de gasto será

$$e(p_1, p_2, u) = 2u p_1^{1/2} p_2^{1/2}$$

también se conoce que la Demanda Hicksiana del bien 1 es

$$x_1^h(p_1, p_2, u) = u \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/2}$$

Si $p_1^0 = 1$; $p_2^0 = 1$; $w^0 = 10$ y luego sucede un cambio de $p_1^1 = 2$ se tendrá

$$\begin{aligned} x_1^*(p_1^0, p_2^0, w^0) &= \frac{10}{2(1)} = 5 \\ x_2^*(p_1^0, p_2^0, w^0) &= \frac{10}{2(1)} = 5 \\ v(p_1^0, p_2^0, w^0) &= \frac{10}{2(1)} = 5 = u^0 \end{aligned}$$

Variación Compensada:

teniendo que $e(p_1^0, p_2^0, u^0) = 2 \cdot 5 \cdot 2^{1/2} = 2^{1/2} \cdot 10$

$$\begin{aligned} VC &= e(p^1, u^1) - e(p^1, u^0) \\ &= 10 - 10 \cdot 2^{1/2} \\ &= 10 \left(1 - 2^{1/2} \right) = -4.142 \end{aligned}$$

por el método de la integral tendríamos

$$\begin{aligned} VC &= \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p, \bar{u}^0) dp_1 \\ &= \int_{p_1^1}^{p_1^0} 5 \left(\frac{1}{p_1} \right)^{1/2} = 10 p_1^{1/2} \Big|_{p_1^1=2}^{p_1^0=1} = 10 - 10 \cdot 2^{1/2} \end{aligned}$$

Variación Equivalente:

$$\begin{aligned} \text{teniendo } u^1 &= v(p_1^1, p_2^0, w^0) = \frac{10}{2} \frac{1}{2^{1/2}} = 5 \cdot \frac{1}{2^{1/2}} \\ e(p_1^0, p_2^0, u^1) &= 2 \frac{5}{2^{1/2}} = 2^{1/2} \cdot 5 \text{ se tendrá que} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VE &= e(p^0, u^1) - e(p^0, u^0) = \int_{p^1}^{p^0} h_l(p, \bar{u}^1) dp_l \\ &= 5 \cdot 2^{1/2} - 10 \\ &= 5(2^{1/2} - 2) = -2.9289 \end{aligned}$$

Variación del Excedente (o del Área):

$$\begin{aligned} VEC &= \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1^*(p_1, p_2^0, w^0) dp_1 \\ &= \frac{w}{2} \ln 2p_1 \Big|_{p_1^1=2}^{p_1^0=1} = \frac{10}{2} (\ln 2 - \ln 4) \\ &= -\frac{10}{2} \ln 2 = -5 \ln 2 \\ &= -3.4657 \end{aligned}$$

Estos resultados nos llevan a afirmar que el aumento del precio llevó a que el consumidor perdiera bienestar. De acuerdo a lo explicado anteriormente podemos asegurar que este es un bien normal ya que la variación compensada arroja una mayor pérdida que la variación equivalente. De la misma forma se puede ver que la medición hecha a partir del excedente del consumidor no concuerda con ninguna de las anteriores pero es una buena aproximación dado que se encuentra entre las dos.

4.2 Demanda Agregada

Para la mayoría de preguntas en economía, el comportamiento agregado de los consumidores es más importante que el comportamiento de un solo consumidor. La demanda agregada es la suma de las demandas individuales de cada consumidor. Por lo tanto, la demanda agregada dependerá de los precios de los bienes y de los ingresos de los individuos.

Definition 65 Sea $x_i(p_1, p_2, w_i)$ la demanda por parte de un consumidor i , donde $i = 1, \dots, n$. La demanda de mercado o demanda agregada es la suma de las demandas de todos los consumidores por este bien:

$$X(p, w_1, \dots, w_n) = \sum_{i=1}^n x_i(p, w_i)$$

En esta sección estudiaremos primero algunas propiedades deseables de las que podemos dotar a esta función. Luego ejemplificaremos la manera como se obtiene la demanda agregada. Posteriormente, distinguiremos algunos tipos de demanda agregada para luego hablar de sus desplazamientos y cómo se interpretan los cambios de bienestar ante un cambio en el precio en este contexto.

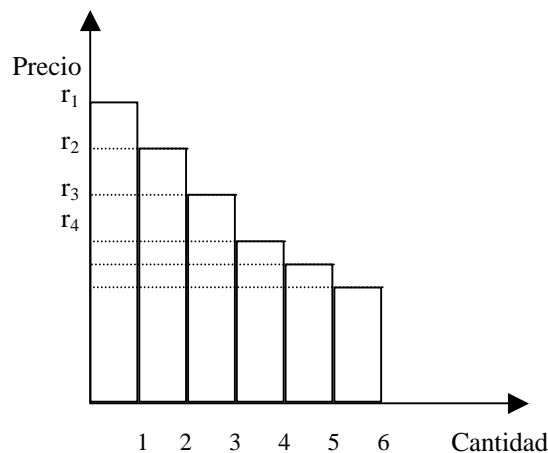
4.2.1 Propiedades

La demanda individual depende de los precios y de la renta, por lo tanto la *demanda agregada* estará en función de los precios, del ingreso total y de su distribución. Muchas veces es deseable expresar la demanda agregada en función de los precios y la riqueza total W , esto es la suma de las rentas individuales. Sin embargo, esta aproximación tiene supuestos bastante fuertes. Uno de ellos es que se necesita que el efecto ingreso sea igual para todos los consumidores y para todos los niveles de riqueza. Esto es equivalente a que todas las sendas de expansión deben ser rectas y paralelas entre los consumidores,¹² este es un caso demasiado específico.

Otra condición que es suficiente y que puede ser menos restrictiva es que el ingreso de cada individuo dependa de los precios y de la riqueza total. El hecho que dependa de los precios no es restrictivo si tenemos en cuenta que nuestro ingreso depende de los salarios del mercado. El problema se genera con la segunda condición, este puede ser el caso de una economía con suficiente intervención estatal. El anterior supuesto lleva a que la función de demanda agregada puede heredar algunas propiedades de las funciones de demanda individuales. En particular, tendremos que será homogénea de grado cero, satisficará la ley de Walras y será continua. Las dos primeras propiedades no son difíciles de demostrar si tenemos en cuenta que las demandas individuales las cumplen, por lo tanto nos concentraremos en la tercera propiedad.

La continuidad de las funciones de demanda individuales es una condición suficiente pero no necesaria, para que las funciones de demanda agregada sean continuas. Consideremos el ejemplo de la demanda de lavadoras (figura 4.2.1), donde la demanda agregada es discreta. Parece razonable suponer que la mayoría de los consumidores sólo quieren tener una lavadora y que la comprarán cuando está no sea mayor a un precio que ellos esperan (precio de reserva). A cualquier precio superior al de reserva la persona i demanda una cantidad nula del bien. Si el precio es inferior demandará una unidad. Si varían las rentas y los gustos de los consumidores, es de esperar que haya varios precios de reserva diferentes. Si hay muchos consumidores que tienen distintos precios de reserva, tiene sentido pensar que la función es continua. Si el precio sube en una pequeña cuantía, sólo decidirán dejar de comprar el bien unos cuantos consumidores, llamados consumidores “marginales”, y la demanda agregada variará en una pequeña cuantía.

¹²Por ejemplo cuando todos los individuos tienen preferencias idénticas y estas son homotéticas. Otro caso se da las preferencias de todos los consumidores son cuasilineales con respecto al mismo bien.



Demanda de una mercancía discreta

Note que en el anterior ejemplo, las demandas de los consumidores no son continuas, pero la demanda agregada lo es. Para asegurar la continuidad de la demanda agregada basta con asegurarnos de que la demanda siempre es única. Así que debemos imponer la convexidad estricta en las preferencias.

4.2.2 Obtención de la demanda agregada

Para determinar la *curva de demanda agregada*, se mantienen fijos los precios de los otros bienes y las rentas; si alguna de estas variables cambiara, la curva de demanda agregada se desplazaría. La información de la curva de demanda agregada indica la cantidad demandada en función del precio; para examinar la relación inversa se utiliza la *función inversa de demanda* $P(X)$, que indica cual debería ser el precio de mercado del bien para que se demandaran X unidades.

Antes hemos visto que el precio de un bien mide la relación marginal de sustitución entre dicho bien y todo lo demás; es decir, el precio de un bien representa la disposición marginal del individuo que lo demanda a pagar por una unidad adicional del mismo. Si todos los consumidores se enfrentan a los mismos precios de los bienes, todos tendrán la misma relación marginal de sustitución en sus puntos de elección óptima. Por lo tanto, la curva inversa de demanda, mide la relación marginal de sustitución o la disposición marginal de pagar de todos los consumidores que compran el bien.

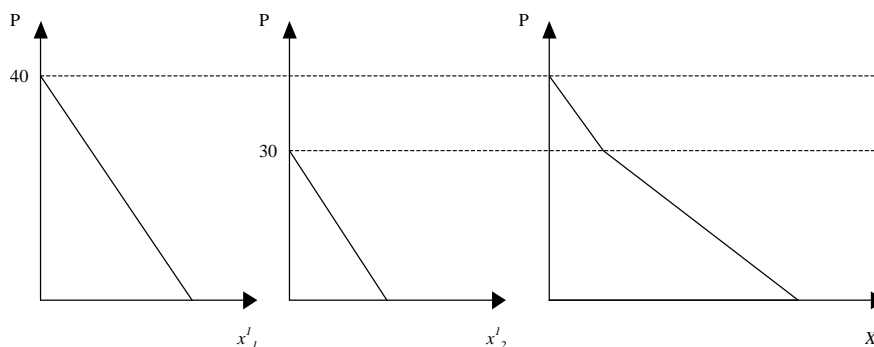
Example 66 Para mostrar cómo se agregan gráficamente las demandas (figura 4.2.2), se supondrá que existen dos consumidores cuyas funciones de demanda son $x_1^1(p) = 40 - p$ y $x_2^1(p) = 30 - p$. En este caso debe tenerse en cuenta que a determinados precios (Ej. 50) las cantidades demandadas de acuerdo a las funciones dadas resultarían negativas, como esto no tiene sentido, se reescriben las funciones como:

$$\begin{aligned} x_1^1(p) &= \max[40 - p, 0] \\ x_2^1(p) &= \max[30 - p, 0] \end{aligned}$$

la función inversa de demanda quedaría como

$$p(X) = \begin{cases} 40 - X & \text{si } p \in [30, 40] \\ 35 - \frac{1}{2}X & \text{si } 0 \leq p < 30 \end{cases}$$

Después de tener las respectivas funciones, a cada nivel de precios se suman las cantidades individuales, es decir las cantidades horizontales para conocer la demanda agregada en cada punto (Figura 4.2.2).



Demanda Agregada

4.2.3 Tipos de curva de demanda

En la literatura existen distintos tipos de especificación de la demanda agregada. Aquí presentaremos los dos más utilizados.

- Demanda lineal

Se considera la manera más sencilla de indicar la relación entre la cantidad demandada, el precio del bien y el ingreso. Son de la forma $X = a + bp_x + cw + dp_y$. Note que esta ecuación no es homogénea de grado cero, a menos que $b = c = d = 0$. A lo largo de una curva lineal, la pendiente ($\frac{\partial X}{\partial p}$) es constante, lo cual no es cierto en muchas aplicaciones. En este caso, las elasticidades precio de la demanda no son constantes a lo largo de la recta (figura 4.10); de hecho, entre mayor sea el precio y menores las cantidades, la demanda es más elástica.

- Funciones de elasticidad constante (figura 4.11)

En esta clase de funciones las elasticidades son constantes a lo largo de la curva. Pueden expresarse como $X = Ap_x^b w^c p_y^d$ o como $\ln X = a + b \ln p_x + c \ln w + d \ln p_y$. Esta ecuación es homogénea de grado cero siempre que $b + c + d = 0$.

4.2.4 Desplazamientos de la curva de Demanda Agregada

La curva de demanda resume la relación entre las cantidades y su precio, suponiendo constantes los otros precios y los ingresos. Si queremos analizar

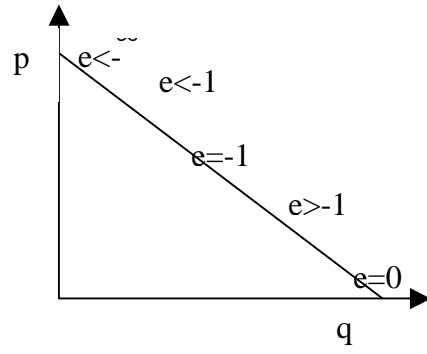


Figure 4.10: Función de demanda lineal y su elasticidad

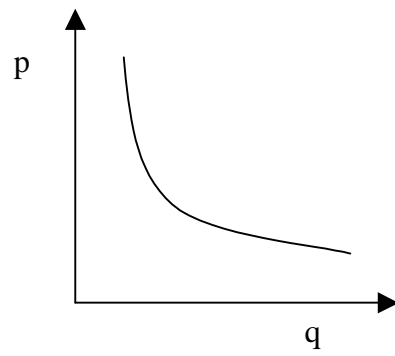


Figure 4.11: Función de demanda de elasticidad constante

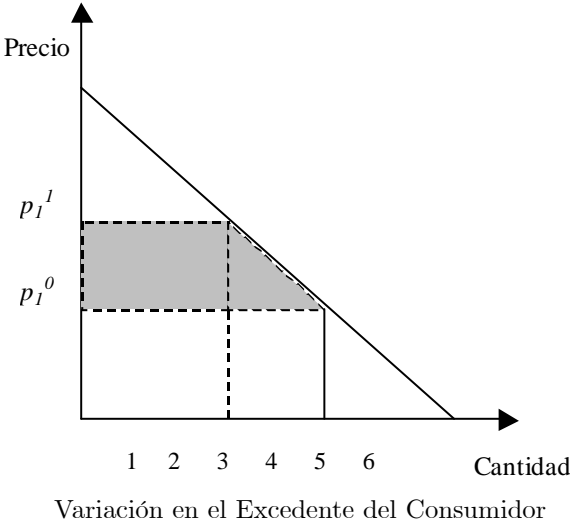
las razones por las que una curva de demanda puede desplazarse, debemos ver cómo se desplazan las demandas individuales.

Si existen dos consumidores que consideran el bien normal y a los dos le suben el ingreso, las demandas individuales y por ende la agregada, se desplazarán hacia fuera. Sin embargo, si al primero le reducen el ingreso y al segundo se lo aumentan, el efecto será ambiguo y dependerá de las magnitudes de las variaciones del ingreso y de la proporción de ingreso que los individuos gastan en ese bien. Por ejemplo, una reducción del impuesto sobre la renta que favoreciera a las personas pobres, podría influir significativamente en la demanda de alimentos y en la compra de artículos básicos, pero no en artículos de lujo. Lo contrario pasaría, si la política favoreciera a los ricos.

Otra razón por la que la demanda agregada se desplazaría son los cambios en los demás precios. Por ejemplo si sube el precio del bien 2, y la gente considera dicho bien sustituto con el bien 1, la demanda de mercado del bien 1 se desplazará hacia fuera. Lo contrario pasará si son complementarios. También la demanda agregada puede afectarse por cambios en los gustos de los consumidores.

4.2.5 Bienestar

Dado que la demanda agregada se expresa en función de los precios y la riqueza total, la medida de bienestar que más se ajusta en este contexto es la variación del excedente de los consumidores. El excedente de los consumidores es interpretado aquí como la diferencia entre la disposición a pagar de una sociedad por una mercancía y lo que realmente paga. Ante un aumento del precio, la variación del excedente, que antes dividimos en dos partes, tiene una interpretación algo distinta. El rectángulo sigue representando la disminución del bienestar debido a que los individuos deben pagar un precio más alto por las mismas unidades que compraban antes. Por su parte, el triángulo representa la pérdida de bienestar de la sociedad porque hay menos individuos que pueden consumir esa mercancía.



Chapter 5

Preferencia Revelada

(Resumen de: Cap 1 MasColell, Cap 2 Jehle y Renny, Cap 7 Varian Intermedio)

En este segundo enfoque de la teoría económica del consumidor, el comportamiento de la elección se tomará como el objeto "primitivo" de la teoría, es decir que los supuestos recaerán sobre la elección observada del consumidor. Este enfoque fue desarrollado por Samuelson (1947). El objetivo de este enfoque es imponer restricciones para asegurar la consistencia de las decisiones del individuo sin utilizar los axiomas de racionalidad. Este enfoque permite generalizar más el comportamiento del individuo que el enfoque de preferencias. Además, hace supuestos sobre objetos que son directamente observables, en vez de cosas que no lo son (preferencias). Este enfoque implica que la teoría de la elección del consumidor no necesita estar basada en un proceso de introspección pero sí puede incorporar observaciones del comportamiento.

5.1 El Axioma Débil de Preferencia Revelada

Una de las reglas que se imponen usualmente a la elección de los individuos es el axioma débil de preferencia revelada. De ahora en adelante asumiremos que la demanda Marshalliana $x^*(p, w)$ es única, es homogénea de grado cero y que satisface la Ley de Walras. En este contexto el axioma toma la siguiente forma

Definition 67 *La función de demanda Marshalliana $x(p, w)$ satisface el **axioma débil de la preferencia revelada (ADPR)** si la siguiente propiedad se mantiene para cualquier dos situaciones precio-ingreso (p, w) y (p', w') :*

Si $p \cdot x(p', w') \leq w$ y $x(p', w') \neq x(p, w)$ entonces $p' \cdot x(p, w) > w'$

En el caso de dos bienes se tendrá que si

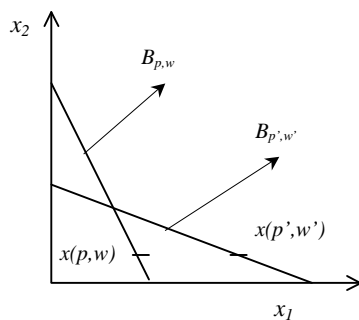
$$p_1 \cdot x_1(p', w') + p_2 \cdot x_2(p', w') \leq w$$

y $x_\ell(p', w') \neq x_\ell(p, w)$ para $\ell = 1, 2$. Entonces

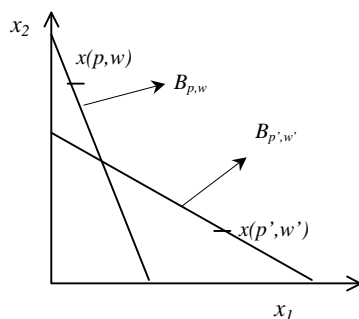
$$p'_1 \cdot x_1(p, w) + p'_2 \cdot x_2(p, w) > w$$

La idea detrás de este axioma es la siguiente: Si $p \cdot x(p', w') \leq w$ y $x(p', w') \neq x(p, w)$, entonces sabemos que, cuando el consumidor se enfrenta a los precios p y a la riqueza w , el consumidor escoge la canasta de consumo $x(p, w)$ aún si la canasta $x(p', w')$ era asequible (ya que se podía comprar con w). Podemos interpretar esta elección como "revelar" una preferencia de $x(p, w)$ sobre $x(p', w')$. De este modo, dada su *preferencia revelada*, esperamos que escoja $x(p, w)$ sobre $x(p', w')$ siempre y cuando ambas sean costeables. Si esto es así, la canasta $x(p, w)$ no debe ser costeable cuando los precios y la riqueza están dados por (p', w') en donde el consumidor elige $x(p', w')$. Y por tanto el axioma débil exige que $p'x(p, w) > w'$.

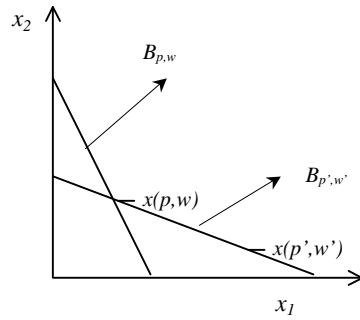
A continuación se tienen algunos ejemplos cuando $L = 2$. En cada diagrama se muestran dos conjuntos presupuestarios $B_{p,w}$ y $B_{p',w'}$ y sus correspondientes elecciones de cestas de consumo $x(p, w)$ y $x(p', w')$. Las gráficas de la *a*, *b* y *c* cumplen con el axioma mientras que la *d* y *e* no.



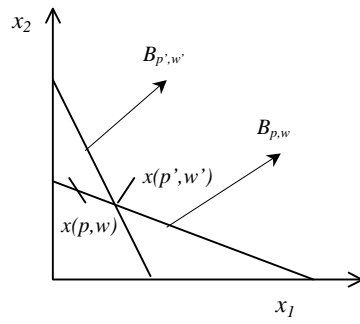
(a)



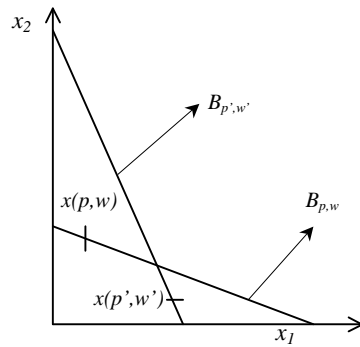
(b)



(c)



(d)



(e)

Example 68 (Tomado de Varian Intermedio) El axioma débil de la preferencia revelada podría ser contrastado en la práctica de la siguiente manera. Se observan varias elecciones de cestas de bienes a cada uno de los diferentes precios (el consumidor consumirá únicamente dos bienes (x_1, x_2)). Se tiene entonces las siguientes observaciones de un consumidor. (Se entenderá p_l^t como el precio del bien l según la observación t , y x_l^t la cantidad demandada del bien l en la observación t)

Observación	p_1	p_2	x_1	x_2
1	1	2	1	2
2	2	1	2	1
3	1	1	2	2

tabla 1. Datos de consumo

Con esta información es posible calcular cuanto es el costo de la cesta elegida a cada vector y de igual forma cuanto le habría costado las distintas cestas a cada uno de los distintos vectores de precios. De esta forma se tendrá la siguiente tabla cuyas celdas muestran el gasto que hubiera hecho el consumidor si hubiera elegido la cesta x a los precios p .

	Cestas(x)		
	1	2	3
Precios(p)	5	4	6
2	4	5	6
3	3	3	4

La diagonal muestra el gasto que verdaderamente hizo el consumidor a cada uno de los precios (i.e. cuando los precios fueron p_1^1, p_2^1 el consumidor gastó $p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1 = 5$). Mientras que los otros valores de una misma fila indican el gasto en el que hubiera incurrido el consumidor si hubiera comprado otra canasta. Note que si el consumidor hubiera elegido la cesta 1 en el periodo 2 hubiera incurrido en un menor gasto que en el que incurrió gastando en la canasta 2. Eso nos podría revelar que este individuo prefería la canasta 2 a la 1. Sin embargo, si en el periodo 1 hubiera comprado la canasta 2 hubiera incurrido en un gasto menor que al haber comprado 1, y si sabemos, teniendo en cuenta la elección del segundo periodo, que prefería 2 a 1, ¿por qué no compró 2 en el periodo 1? Esta inconsistencia muestra que este individuo no cumple el ADPR.

Exercise 69 (Tomado de MWG) Se le da la siguiente información parcial acerca de las compras de un consumidor, el cual consume sólo dos bienes

	Año 1		Año 2	
	Cantidad	Precio	Cantidad	Precio
Bien 1	100	100	120	100
Bien 2	100	100	?	80

Sobre que rango de cantidades del bien 2 consumido en el año 2 se puede concluir:

1. Que el comportamiento es inconsistente (i.e., va en contradicción del axioma débil)
2. Que la canasta de consumo en el año 1 es revelada preferida a la del año 2
3. Que la canasta de consumo en el año 2 es revelada preferida a la del año 1
4. Que hay información insuficiente para afirmar (a), (b) y/o (c)

5. Que el bien 1 es inferior (a algún precio) para este consumidor, asumiendo que el axioma débil se satisface
6. Que el bien 2 es inferior (a algún precio) para este consumidor, asumiendo que el axioma débil se satisface

Así como los supuestos que se mantenían en la teoría basada en preferencias nos llevaban a conclusiones sobre el comportamiento del consumidor, la teoría de la preferencia revelada también nos llevará a implicaciones similares. En esta sección mostraremos como el cumplimiento del ADPR lleva a conclusiones similares derivadas de las demandas hicksianas; asimismo, mostraremos una versión de la ecuación de Slutsky utilizando este enfoque.

5.1.1 Ley de demanda compensada

Ya se vio antes que el cambio en el precio afecta al consumidor de dos formas. Primero, altera el costo relativo de las diferentes mercancías; y segundo, también afecta la riqueza real del individuo pues el aumento de un precio empobrece al consumidor. Para estudiar las implicaciones del ADPR es necesario aislar el efecto sustitución.

Una manera de realizar esto es simplemente compensando el ingreso de una forma similar a la variación de Hicks. Sin embargo, como no conocemos las curvas de indiferencia del individuo, la compensación se hará de tal forma que el individuo pueda volver a comprar su canasta inicial. Suponiendo que cuando el individuo se enfrenta a p, w elige $x(p, w)$, entonces si los precios cambian a p' la riqueza del individuo debe ajustarse a $w' = p' \cdot x(p, w)$ ¹ para que la canasta inicial sea costeable. De este modo conocemos que el ajuste neto de la renta, conocido como la *compensación de la riqueza de Slutsky*, será $\Delta w_{Slutsky} = \Delta p \cdot x(p, w)$ ² donde $\Delta p = p' - p$. De esta manera la nueva restricción pasa por la cesta original. Por esta razón tendremos que $\Delta w_{Slutsky} \geq \Delta w_{Hicks}$ (ver gráfico 5.1); se dará con igualdad si la demanda hicksiana, después de los cambios en los precios, es la misma que teniendo los precios iniciales.

Cuando una variación en los precios viene acompañada por una compensación en la riqueza se le llaman *cambios compensados en los precios*. A continuación se mostrará que el ADPR puede ser establecido equivalentemente en términos de las respuestas de la demanda a cambios compensados en los precios.

Proposition 70 *Suponga que la función de demanda Marshalliana $x(p, w)$ es homogénea de grado 0 y satisface la ley de Walras, entonces $x(p, w)$ satisface el axioma débil si y solo si la siguiente propiedad se mantiene:*

Para cualquier cambio compensado en los precios desde una situación inicial (p, w) a una final $(p', w') = (p', p' \cdot x(p, w))$ se tiene que

$$(p' - p)[x(p', w') - x(p, w)] \leq 0$$

¹ Si $L = 2$ y cambia únicamente el p_1 a p'_1 se tendrá que $w' = p'_1 x_1(p, w) + p_2 x_2(p, w)$

² Para el mismo caso $L = 2$ $\Delta w = w' - w = (p'_1 - p_1)x_1(p, w)$

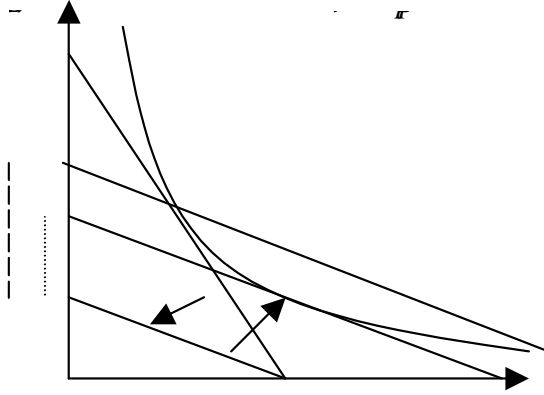


Figure 5.1: Variación de Hicks y de Slutsky

con estricta desigualdad siempre que $x(p, w) \neq x(p', w')$.³

Esta desigualdad puede ser escrita como $\Delta p \Delta x \leq 0$ y se conoce como la *ley de la demanda compensada*. Se le da este nombre ya que la demanda y el precio se mueven en direcciones opuestas, siempre y cuando se realice un cambio compensado de precios. Esta ley es equivalente a la que se obtiene con las demandas hicksianas (efecto sustitución negativo). Cabe recordar que esto no necesariamente ocurre cuando no existe un cambio compensado en precios.

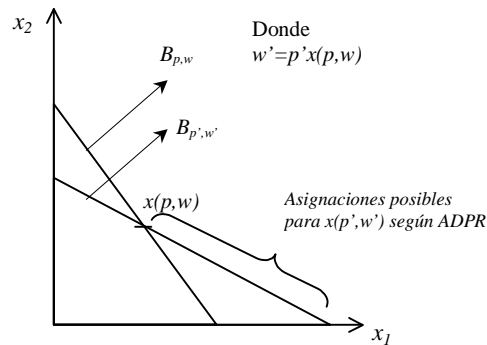
Para lograr una mejor comprensión, suponga que sólo existe un cambio en el precio del bien ℓ , por lo tanto, $\Delta p \cdot \Delta x = \Delta p_\ell \cdot \Delta x_\ell$. Esto quiere decir que si $\Delta p_\ell > 0$ entonces se debe tener que $\Delta x_\ell < 0$. Así, un incremento compensado en el precio del bien 1 implica que la cantidad demandada del bien ℓ no pueda aumentar, como lo muestra la figura 5.1.1.

³Para el caso en $L = 2$ se tendrá que $(p'_1 - p_1)[x_1(p', w) - x_1(p, w)] \leq 0$.

Proof. Si las dos cestas son iguales, es fácil ver que la ecuación sería igual a cero, así que supondremos que son diferentes. La ecuación puede reescribirse como $p'[x(p', w') - x(p, w)] - p[x(p', w') - x(p, w)]$. Como se habla con cambios compensados sabemos que $w' = p'x(p, w)$. Además por la ley de Walras sabemos que $w' = p'x(p', w')$. Por lo tanto $p'[x(p', w') - x(p, w)] = 0$.

Con respecto al segundo término, como $p'x(p, w) = w'$, entonces $x(p, w)$ es alcanzable ante (p', w') . Si el ADPR se cumple entonces debe pasar que $p'x(p', w') > w'$. Como $w = px(p, w)$ por Ley Walras, esto implica que $p[x(p', w') - x(p, w)] > 0$ y esto lleva al resultado. ■

Note que las hicksianas también cumplen esta propiedad ya que $p''h(p'', u) \leq p''h(p', u)$ y además $p'h(p'', u) \geq p'h(p', u)$, sustrayendo estas dos desigualdades se obtiene el resultado.



La ley de la demanda compensada

5.1.2 Ecuación de Slutsky

Para obtener la versión de la ecuación de Slutsky a partir del ADPR debemos diferenciar la demanda con respecto a sus dos componentes y suponer que el cambio de precios es compensado, es decir:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial p} dp + \frac{\partial x}{\partial w} dw$$

siempre y cuando $dw = x \cdot dp$. Entonces, reemplazando, tendremos que

$$dx = \frac{\partial x}{\partial p} dp + \frac{\partial x}{\partial w} [x \cdot dp]$$

Reemplazando esta condición en la ley de demanda compensada tendremos

$$dp \underbrace{\left[\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial w} x \right]}_{dx} dp \leq 0$$

Esta es la misma ecuación de Slutsky pues nos dice que los efectos sustitución deben ser negativos, pero esta vez llegando a través de cambios compensados en los precios de tal forma que el individuo pueda alcanzar su canasta inicial. Sin embargo, esta versión de ecuación de Slutsky no necesariamente lleva a que los efectos cruzados sean simétricos, excepto en una economía de dos bienes.

El efecto sustitución de acuerdo a este enfoque, mide la variación de la demanda cuando varían los precios pero *el poder adquisitivo del consumidor se mantiene constante* de tal forma que la canasta inicial demandada continúa siendo asequible. Esto se logra construyendo una restricción presupuestal hipotética cuya pendiente sea la nueva relación de precios, pero que pase exactamente por la cesta consumida antes del cambio en los precios. La diferencia entre la cantidad consumida inicial y la cantidad consumida óptima sobre la restricción presupuestal hipotética es el *efecto sustitución*.

Para construir la restricción presupuestal hipotética se debe realizar un ajuste o compensación en el ingreso. Sea (x_1, x_2) la cesta consumida inicialmente y (p_1, p_2, w) los precios y el ingreso inicial a los cuales esa cesta resulta óptima. Ahora suponga un aumento en el precio del bien 1, de p_1 a p'_1 , entonces el ingreso necesario para que la cesta inicial siga siendo asequible es:

$$w' = p'_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2$$

mientras que el ingreso inicial era $w = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2$

Luego, al restar estas dos expresiones, se obtiene la variación en la renta monetaria necesaria para que la antigua cesta sea asequible a los nuevos precios:

$$\Delta w = w' - w = x_1 \cdot (p'_1 - p_1) = x_1 \cdot \Delta p_1$$

Aunque la canasta (x_1, x_2) se puede consumir sobre esta nueva restricción (p'_1, p_2, w') , no tiene porque ser la canasta óptima correspondiente a estos nuevos parámetros. Si la cesta óptima en (p'_1, p_2, w') , es (x'_1, x'_2) , el *ES* se identificará como el desplazamiento de la cesta (x_1, x_2) a la cesta (x'_1, x'_2) . Matemáticamente el *ES* puede expresarse como:

$$ES = x'_1(p'_1, p_2, w') - x_1(p_1, p_2, w)$$

Como vimos antes, el *ES* siempre actúa en sentido contrario a la variación del precio. El *EI* se observa cuando se pasa de la restricción presupuestal hipotética compensada a la nueva restricción presupuestal generada por el cambio en los precios. Como estas dos restricciones tienen como pendiente la nueva relación de precios, el desplazamiento de una a la otra es un movimiento paralelo de la restricción presupuestal, que es equivalente a un cambio en el ingreso. Entonces el *EI* es la variación de la demanda del bien x_1 cuando la renta varía de w a w' , manteniendo los precios (p'_1, p_2) , es decir:

$$EI = x'_1(p'_1, p_2, w') - x''_1(p'_1, p_2, w)$$

El sentido del *EI* depende del tipo de bien que se esté tratando. Si es bien inferior será negativo, si es normal será positivo.

En la figura 5.2 se muestra cómo actúa la ecuación de Slutsky bajo el enfoque de preferencia revelada. Suponga que en un principio este individuo consume la canasta x . Ahora suponga que aumenta el precio de la mercancía 1, luego el individuo consumirá ahora y . Note que el efecto total es el mismo de antes; sin embargo, su descomposición es distinta. La compensación de ingreso que ahora se hace al individuo permite que este vuelva a comprar x . Pero como la mercancía 1 está más cara que la mercancía 2, entonces el individuo sabe que puede maximizar todavía más utilidad disminuyendo su consumo de la mercancía 1 y aumentando mucho más el de la mercancía 2. Esto lo llevará a una utilidad más alta que la inicial.

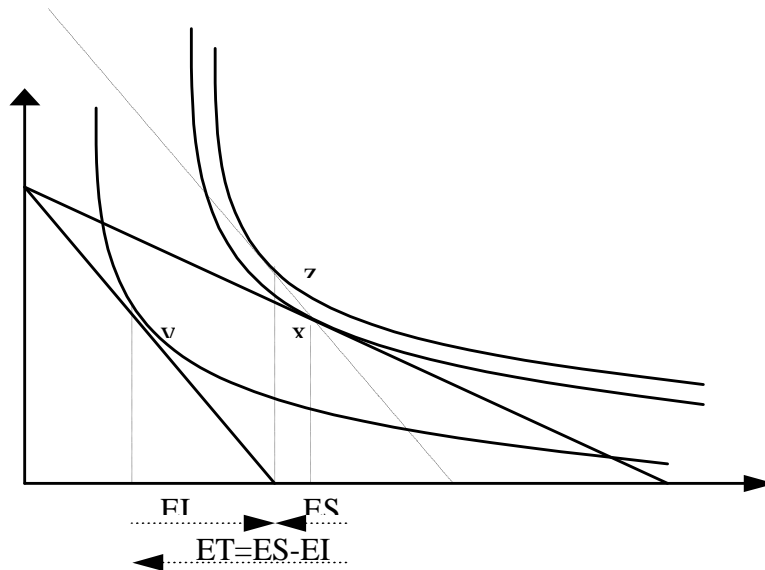


Figure 5.2: Ecuación de Slutsky en preferencia revelada

Example 71 Suponga que la función de demanda del consumidor es

$$x_1^* = \frac{0.5w}{p_1}$$

y que los parámetros iniciales son $w = 100$, $p_1 = 4$ y $p_2 = 10$. Por lo tanto, la demanda del bien 1 será $x_1(p_1, p_2, w) = 12,5$. Ahora, suponga que el precio del bien aumenta a $p'_1 = 5$, de tal forma que la nueva cantidad demandada será $x'_1(p'_1, p_2, w) = 10$. Esto nos indica que el efecto total en la demanda será de $-2,5$. Para descomponer este efecto, y conocer la magnitud del ES primero se debe calcular en cuánto debe variar la renta para que el consumo inicial sea alcanzable:

$$\begin{aligned} \Delta w &= w' - w = x_1 \cdot (p'_1 - p_1) = x_1 \cdot \Delta p_1 \\ \Delta w &= w' - w = (12,5) \cdot (5 - 4) = 12,5 \\ w' &= 100 + 12,5 = 112,5 \end{aligned}$$

Con este nuevo ingreso la nueva demanda es $x'_1(p'_1, p_2, w') = 11,25$, de tal forma que el ES sería igual a:

$$\begin{aligned} ES &= x'_1(p'_1, p_2, w') - x_1(p_1, p_2, w) \\ ES &= 11,25 - 12,5 = -1,25 \end{aligned}$$

y el EI se puede hallar como:

$$\begin{aligned} EI &= x_1'(p_1', p_2, w') - x_1''(p_1', p_2, w) \\ EI &= 11,25 - 10 = 1.25 \end{aligned}$$

Lo anterior puede llevar a pensar en una equivalencia entre el enfoque basado en preferencias y el enfoque de preferencia revelada; sin embargo, esta equivalencia aún no es cierta. En el caso del enfoque de preferencia revelada los efectos sustitución pueden no ser simétricos,⁴ condición necesaria en el enfoque basado en preferencias. Esta asimetría implica la imposibilidad de racionalizar las demandas observadas para encontrar las preferencias, es decir, encontrar preferencias racionales que representen estas elecciones. En particular esto se da porque el ADPR no impone transitividad sobre las elecciones. Note que la definición de este supuesto solo tiene en cuenta dos canastas distintas con dos restricciones presupuestales, así que el ADPR puede cumplirse únicamente para pares de canastas y no para todo el conjunto de canastas que se encuentra en el conjunto de consumo.

En conclusión, el enfoque de preferencia revelada permite hacer inferencia sobre elecciones observables del individuo. Es por eso que la compensación del ingreso no se hace para alcanzar la misma curva de indiferencia inicial, que en la realidad no es observable, sino que permite que el individuo alcance su canasta inicial. Ahora bien, sabemos que si el individuo cumple el ADPR disminuirá el consumo del bien que aumentó el precio y aumentará el del otro, lo que suponemos lleva a que tenga ahora una utilidad mayor a la inicial. Aun cuando no es cierto que sean completamente equivalentes los dos enfoques, las conclusiones a las que hemos llegado con reglas de elección son similares que las basadas en preferencia e incluso menos restrictivas.

En resumen se han dado tres implicaciones de este enfoque:

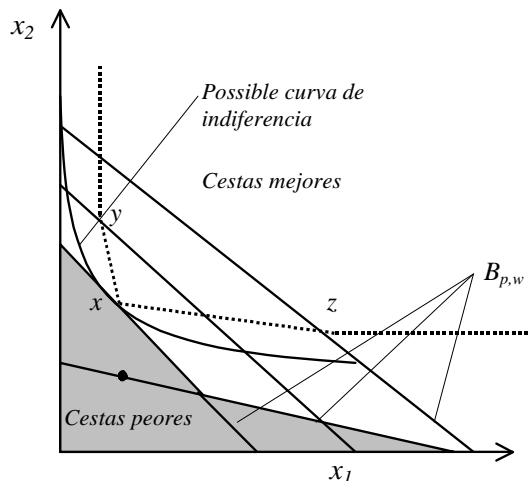
1. El requerimiento de consistencia incorporado en el ADPR combinado con la homogeneidad de grado cero y la ley de Walras, es equivalente a la ley de la demanda compensada.
2. La ley de demanda compensada, a su turno, implica que los efectos sustitución sean negativos.
3. Estos supuestos no implican que los efectos sustitución sean simétricos, excepto en el caso de dos bienes.

Esto significa que el enfoque basado en elección válida, en buena parte, el enfoque clásico basado en preferencias.

⁴En el caso de dos bienes siempre son simétricos, pero en el caso de más de dos bienes pueden no serlo.

5.1.3 Recuperación de preferencias a partir de la preferencia revelada

Note que si se tienen distintas rectas presupuestales y se conoce las elecciones del consumidor en cada una de ellas se podría llegar a realizar una aproximación sobre las preferencias de este individuo. Si se realizan algunos supuestos sobre las preferencias del consumidor se podría llegar a una mejor estimación. Un ejemplo de ello se da en la figura 5.1.3 cuando los supuestos que se hacen son el de convexidad (cualquier promedio ponderado o combinación convexa entre las cestas x y y o x y z es preferida a la cesta x) y monotonicidad estricta (cestas que tengan más elementos de al menos uno de los bienes serán preferidas). Allí, el área que se encuentra arriba de la recta punteada son las cestas que el consumidor prefiere a x , mientras que las cestas que se encuentran en el área sombreada de abajo indican las cestas que son peores a x . Por tanto la curva de indiferencia de este consumidor deberá estar entre estas dos áreas



5.2 El axioma fuerte de la preferencia revelada

Anteriormente se vió que la elección del consumidor puede satisfacer el axioma débil pero puede no ser generado por una relación de preferencia racional. Por lo tanto, es necesaria una condición necesaria y suficiente de consistencia entre el comportamiento de la demanda del consumidor que implique que el comportamiento de demanda pueda racionalizarse por las preferencias.⁵ Esta condición se conoce como el Axioma Fuerte de Preferencia Revelada (AFPR):

Definition 72 La demanda del mercado $x(p, w)$ satisface el axioma fuerte de la preferencia revelada si para cualquier lista

$$(p^1, w^1), \dots, (p^N, w^N)$$

⁵ Este argumento fue expuesto por Houthakker.

con $x(p^{n+1}, w^{n+1}) \neq x(p^n, w^n)$ para todo $n \leq N-1$, se tiene $p^N \cdot x(p^1, w^1) > w^N$ siempre que se tenga $p^n \cdot x(p^{n+1}, w^{n+1}) \leq w^n$ para todo $n \leq N-1$.

En palabras, si $x(p^1, w^1)$ es directamente o indirectamente revelado preferido a $x(p^N, w^N)$, entonces $x(p^N, w^N)$ no puede ser indirectamente revelado preferido a $x(p^1, w^1)$ (por tanto $x(p^1, w^1)$ no puede ser accequible a (p^N, w^N)). Note que la diferencia entre el ADPR y el AFPR es que el primero exige que si el consumidor revela *directamente* que $x \succ^* y$ nunca debemos observar que revela *directamente* que $y \succ^* x$; mientras que el AFPR exige que tampoco se pueda revelar indirectamente. Precisamente aquí esta la noción de transitividad requerida.

La figura 5.3 ilustra el concepto de que el consumidor revele indirectamente que prefiere una cesta x a otra y . Si se tienen dos rectas presupuestales y las elecciones de consumo son las que se indican allí, entonces se observa que este consumidor revela indirectamente que prefiere la cesta $x(p, w)$ a la cesta y . Esto se da puesto que $x(p, w)$ se prefiere a $x(p', w')$ cuando se está en (p, w) ; además, cuando la economía se encuentra en la situación precio-renta (p', w') , este consumidor prefiere $x(p', w')$ a la cesta y y por transitividad se da la conclusión anteriormente enunciada.

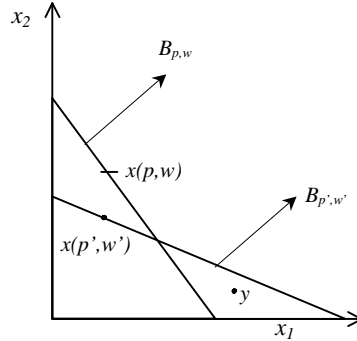


Figure 5.3: Preferencia revelada indirectamente

5.3 Extensión

5.3.1 Los números índices

Los números índices son una aplicación de la preferencia revelada para examinar cómo ha variado el consumo y el bienestar de un agente en determinado periodo. Sea (p_1^t, p_2^t) y (x_1^t, x_2^t) los precios y cantidades del periodo t . Sea (p_1^b, p_2^b) y (x_1^b, x_2^b) los precios y cantidades del periodo base b . Si para comparar el consumo se utilizan los precios del periodo base (b) estaríamos calculando el índice de Laspeyres. Si por el contrario utilizamos los precios del periodo t hablamos

del índice de Paasche. Ambos índices muestran lo que ocurrió con el consumo medio, pero utilizan “ponderaciones” distintas.

$$\text{Índice de cantidades de Paasche: } P_q = \frac{p_1^t x_1^t + p_2^t x_2^t}{p_1^t x_1^b + p_2^t x_2^b}$$

$$\text{Índice de cantidades de Laspeyres: } L_q = \frac{p_1^b x_1^t + p_2^b x_2^t}{p_1^b x_1^b + p_2^b x_2^b}$$

Si el índice de cantidades de Paasche es menor que uno, nos está diciendo que la cesta b no era alcanzable en el periodo t y por lo tanto no sabemos nada sobre la ordenación de sus preferencias.⁶ De la misma forma, si el índice de cantidades de Laspeyres es menor que uno es porque revela que el individuo prefiere la canasta comprada en b que en t .

Estos índices también pueden calcularse en términos de precios. Así el índice de precios de Paasche toma las cantidades del periodo t , mientras el índice de precios de Laspeyres toma las cantidades del periodo base.

$$\text{Índice de precios de Paasche: } P_p = \frac{p_1^t x_1^t + p_2^t x_2^t}{p_1^b x_1^t + p_2^b x_2^t}$$

$$\text{Índice de precios de Laspeyres: } L_p = \frac{p_1^t x_1^b + p_2^t x_2^b}{p_1^b x_1^b + p_2^b x_2^b}$$

Contrario a los anteriores, estos índices no tienen interpretación por sí solos. Así que debemos crear un índice que relacione los gastos totales de los dos periodos y compararlo con los índices de precios. Por ejemplo:

Sea $M = \frac{p_1^t x_1^t + p_2^t x_2^t}{p_1^b x_1^b + p_2^b x_2^b}$. Si $P_p > M$ entonces es porque se está revelando que prefiere la cesta elegida en el año b a la elegida en el año t . Esto lo sabemos también porque si los precios aumentan más que la renta entre el año b y el año t , es de esperar que el bienestar del consumidor tienda a empeorar. Por su parte, si M es menor que el índice de precios de Laspeyres ($P_L > M$), el consumidor debe disfrutar de un mayor bienestar en el año t que el año b .

⁶El hecho de que no se alcance a comprar no significa que sea mejor a lo que sí alcanzamos.

Chapter 6

Elección Intertemporal

(Resumen de: Cap 10 Varian Intermedio)

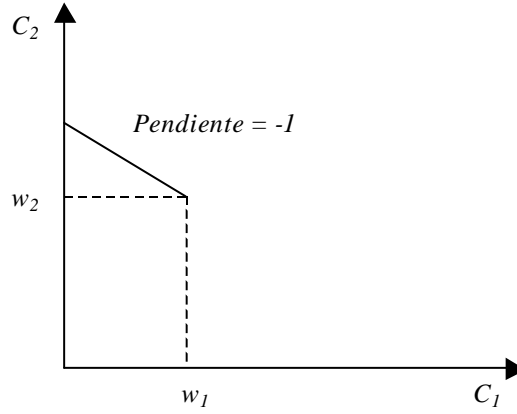
Como se mencionó en el primer capítulo, la noción de mercancía llevaba a diferenciar los bienes y servicios por de acuerdo al lugar y el tiempo en que estuvieran disponibles. De esta forma, ahora nos concentraremos en las decisiones de un individuo de consumir en distintos periodos de tiempo, de ahí la inclusión de la palabra *intertemporal*. Para esto, en este capítulo proseguiremos el análisis de la conducta del consumidor examinando las decisiones relacionadas con el ahorro y el consumo a lo largo del tiempo.

6.1 Restricción presupuestaria intertemporal

Inicialmente partiremos de un análisis que incluye dos periodos. Por simplicidad se asume que en cada periodo del tiempo se consume un solo bien compuesto con un precio que asumimos igual a uno (este bien puede referirse a una canasta o a un bien específico). La cantidad consumida en el periodo i se notará como c_i . De forma análoga, la renta del individuo en el periodo i será igual a w_i .

6.1.1 Construcción

Si no hay un mercado en el que el consumidor pueda ahorrar ganando una tasa de interés y/o pedir dinero prestado, entonces lo máximo que puede gastar en el periodo 1 es w_1 ; la otra opción, sería ahorrar parte de w_1 para transferirlo al periodo 2. De acuerdo a lo anterior, la restricción presupuestaria sería la que se observa en la figura 6.1.1.



Restricción presupuestaria

Si existe un mercado de crédito, el consumidor puede prestar dinero o pedirlo prestado a la tasa de interés r . En este caso pueden presentarse dos opciones:

- El individuo decide ahorrar en el primer periodo un monto de su renta, de tal forma que lo que podría consumir en el segundo periodo sería igual a la renta en el periodo 2, más lo que ahorro en el periodo 1 y los intereses que ganó:

$$\begin{aligned}c_2 &= w_2 + (w_1 - c_1) + r(w_1 - c_1) \\c_2 &= w_2 + (1 + r)(w_1 - c_1)\end{aligned}$$

Evidentemente, se está suponiendo que $p_1 = p_2 = 1$. Sino sería $p_1 c_1(1 + r) + p_2 c_2 = (1 + r)m_1 + m_2$

- En el primer periodo el individuo decide hacer un consumo c_1 mayor a la renta del mismo periodo w_1 . Para poder hacer esto, debe pedir dinero prestado para pagarlo en el segundo periodo junto con los intereses causados por ese préstamo:

$$\begin{aligned}c_2 &= w_2 - r(c_1 - w_1) - (c_1 - w_1) \\c_2 &= w_2 + (1 + r)(w_1 - c_1)\end{aligned}$$

En cualquier caso la restricción presupuestaria resultante es la misma. Si un consumidor alcanza su elección óptima en un punto donde $c_1 < w_1$, se dice que el individuo es prestamista ya que ahorra parte de su ingreso inicial para ganar la tasa r sobre este monto. Si por el contrario tenemos que $c_1 > w_1$ se denominará prestatario.

Hay dos formas alternativas de reexpresar esta restricción presupuestal:

$$(1 + r)c_1 + c_2 = (1 + r)w_1 + w_2$$

Esta forma está expresando la restricción presupuestal en *valor futuro*, es decir que los precios se están midiendo respecto a los del segundo periodo. En

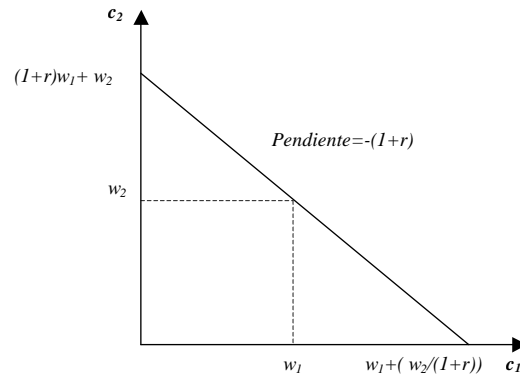


Figure 6.1: Restricción presupuestal con mercado de crédito

este caso $(1+r)c_1$ equivale al costo de la canasta c_1 en el periodo 2: si el dinero que se destinó a c_1 se hubiera prestado, en el segundo periodo se recibiría un monto de dinero igual a $(1+r)c_1$. Note que en este caso el numerario es c_2 . Lo mismo puede decirse de la renta w_1 : si esta renta no se gasta en el periodo 1 y se ahorra ganando la tasa de interés r , en el segundo periodo se recibirá $(1+r)w_1$.

La otra forma de escribir la restricción presupuestal intertemporal es:

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = w_1 + \frac{w_2}{1+r}$$

Esta segunda alternativa es la restricción presupuestal en *valor presente* o *valor actual*. En este caso los precios y la renta se están expresando en términos del primer periodo. Si se quiere gastar un peso en el segundo periodo, bastaría con tener $\frac{1}{1+r}$ pesos en el primero, ya que al ahorrarlos ganarían la tasa de interés r y al final se tendría en total 1. Esta restricción indica a cuanto equivale el consumo total (o el ingreso total), medido en términos de los precios del primer periodo (figura 6.1).

6.1.2 Inflación

La formulación de la restricción presupuestal varía un poco cuando hay inflación (o deflación), y se obtendría una expresión donde los precios no son iguales:

$$p_1(1+r)c_1 + p_2c_2 = (1+r)w_1 + w_2$$

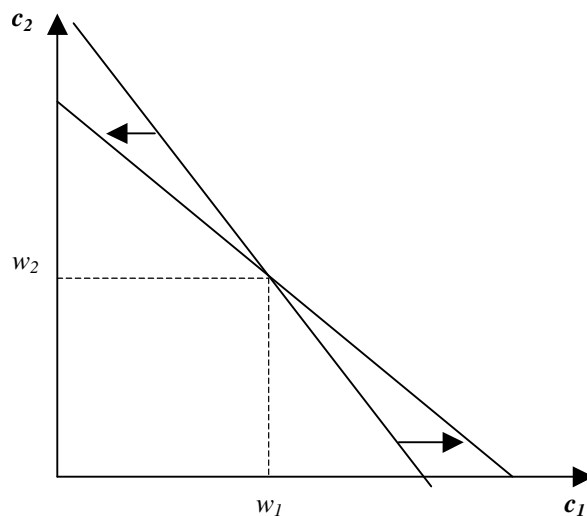
Además, podríamos tener que $p_2 = p_1(1+\pi)$, donde π es la tasa de inflación. Si tomamos entonces al consumo en el periodo 1 como numerario, la restricción presupuestal final sería

$$(1+r)c_1 + (1+\pi)c_2 = w_1(1+r) + w_2$$

De esta forma, la pendiente de esta recta ahora será $-\frac{1+r}{1+\pi}$.

6.1.3 Desplazamientos

La restricción presupuestal puede desplazarse ante cambios en algunos parámetros. Como se vió antes, los precios pueden incidir en el cambio de la pendiente. Mientras la inflación llevará a una disminución de la pendiente pues con el mismo ingreso se podrá comprar menos en el segundo periodo; un aumento de la tasa de interés llevará a un aumento de esta pendiente pues será mejor ahorrar en el primer periodo y consumir lo ahorrado en el segundo periodo, ya que los préstamos se volverían más caros. Sin embargo, contrario a la situación anterior, cambios en un precio no llevarán a cambios en el corte de un eje, cualquier cambio afectará el corte en ambos ejes pues el centro del cambio se dará en el punto que indica los ingresos en cada periodo pues estos no cambian. En la figura 6.1.3 se muestra el efecto de un aumento en los precios (inflación) o de una disminución de la tasa de interés:



Desplazamiento de la restricción intertemporal ante un aumento en los precios o ante una disminución de la tasa de interés.

Por otro lado, un cambio en los ingresos que recibe el individuo en cualquiera de los dos periodos también llevará a cambios en la restricción presupuestal. En particular, un aumento de algún ingreso llevará a un desplazamiento hacia afuera.

6.2 Preferencia por el consumo intertemporal

Las preferencias por el consumo de utilidad se representan exactamente igual que en el caso de dos o más bienes arbitrarios e indicarán cuales son sus gustos en diferentes momentos del tiempo. En el caso de dos periodos, los bienes son consumo en el periodo 1 (c_1) y consumo en el periodo 2 (c_2). Se asumirán preferencias convexas, insaciables localmente, racionales y continuas. La convexidad indica que es de esperar que un individuo prefiera consumir canastas equilibradas a lo largo del tiempo. La segunda propiedad indicará que antes de morir el individuo habrá gastado el ingreso a lo largo de su vida; es decir, no ahorrará ni quedará debiendo dinero. La racionalidad y continuidad serán claves para la representación de sus preferencias.

Al igual que en las preferencias estudiados al inicio del curso, en este caso pueden suponerse que los bienes son *sustitutos perfectos, complementarios* o simplemente que las preferencias son regulares. En el primer caso asumiríamos que al individuo le da lo mismo consumir hoy o mañana. En el segundo caso tendremos que el individuo no está dispuesto a sustituir el consumo entre periodos y lo va a hacer en proporciones fijas.

Example 73 *Algunas funciones que podrían expresar funciones de utilidad intertemporal son:*

$$\begin{aligned} U(c_1, c_2) &= \min\{c_1, c_2\} \\ U(c_1, c_2) &= a \ln c_1 + b \ln c_2 \end{aligned}$$

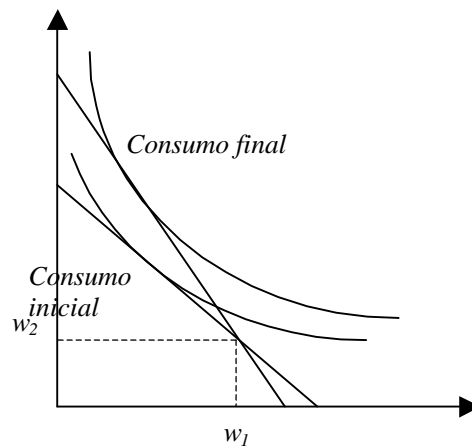
6.3 La solución y estática comparativa

Para encontrar la solución a un problema intertemporal basta con seguir el mismo procedimiento de la maximización de la utilidad: debe maximizarse la función de utilidad del individuo sujeto a la restricción presupuestal intertemporal. por lo tanto, las condiciones de solución son igualar la tasa a la que se sustituyen los consumos con la pendiente de la restricción presupuestal ($-(1+r)$ o $-\frac{1+r}{1+\pi}$).

Anteriormente, el análisis de estática comparativa consistía en examinar las situaciones inicial y final que se presentaban por un cambio en los precios o en el ingreso, sin evaluar el proceso de ajuste. En este caso, el análisis se hace ante cambios en la tasa de interés r , ya que esta es la variable que determina las relaciones entre los consumos presente y futuro. Para esto será conveniente utilizar los axiomas de preferencia revelada aprendidos anteriormente y de allí intuir el comportamiento del individuo y sus efectos sobre el bienestar. Además, haremos uso de una versión adaptada de la Ecuación de Slutsky para examinar los efectos de un cambio en los precios.

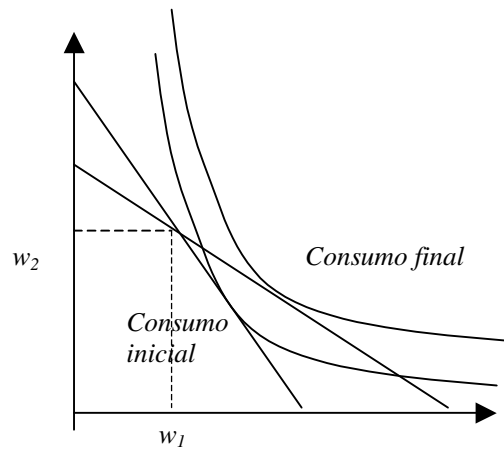
6.3.1 Preferencia revelada

Supongamos que un individuo es prestamista ($c_1 < w_1$). Si sube la tasa de interés, la pendiente de la restricción presupuestaria se hace más inclinada y el consumo en el segundo periodo se vuelve más barato respecto al del primer periodo. Esto hará más rentable el ahorro, por lo tanto es de esperarse que el individuo siga siendo prestamista y aumente su utilidad (ver figura 6.3.1).



Comportamiento de un prestamista ante un aumento de r

Si por el contrario, el consumidor inicialmente es un prestatario ($c_1 > w_1$) y existe una disminución en la tasa de interés, el individuo continuará siendo prestatario ya que esto implica que el consumo en el periodo 1 es relativamente más barato y por lo tanto el préstamo es más barato, así que tiene incentivos para seguir pidiendo dinero prestado (esto no implica que el préstamo tenga que ser mayor). Este caso es ilustrado en la figura 6.3.1.



Comportamiento de un prestatario ante una disminución de r

Todo lo anterior lo sabremos por preferencia revelada. Sin embargo la preferencia revelada no nos dice ante casos donde el individuo es prestatario y sube el tipo de interés, o es prestamista y baja el tipo de interés. En estos dos casos posibles, no se garantiza que después del cambio en r el consumidor siga en el papel que desempeñaba inicialmente. Sin embargo, la preferencia revelada también es un instrumento para averiguar cómo se afecta el bienestar del consumidor ante un cambio del tipo de interés. Si es inicialmente prestatario y aumenta el tipo de interés, pero decide seguir siendo prestatario, su bienestar debe empeorar. Esto lo sabemos porque la nueva canasta se ubica en un punto que antes era accesible.

6.3.2 Ecuación de Slutsky

La versión de la *Ecuación de Slutsky* apropiada para estudiar las decisiones de consumo intertemporal es:

$$\frac{\Delta c_1^{Total}}{\Delta p_1} = \frac{\Delta c_1^{Sustitución}}{\Delta p_1} - (c_1 - w_1) \frac{\Delta c_1^{Ingreso}}{\Delta w}$$

Esta versión de la ecuación se hace teniendo en cuenta el enfoque de preferencia revelada ya que el cambio compensado de precios depende de si el individuo es prestamista o prestatario ya que debe asegurarse que el individuo pueda consumir la canasta inicial. Note que el signo de $(c_1 - w_1)$ me dirá si dicha compensación es positiva o negativa.

Supongamos que sube el tipo de interés. Una subida de interés es como el aumento del precio del consumo actual en comparación con el consumo futuro. Ya sabemos que el *ES* siempre es negativo, y el consumo en el primer periodo debería disminuir por este efecto.

El aumento en la tasa de interés tiene otro impacto y es hacer más caros los préstamos (o más rentable el ahorro). Si el individuo inicialmente era un

prestatario, el aumento en r implica que la renta en valor presente disminuye y por lo tanto la compensación debe ser positiva, por lo que c_1 debe disminuir por este segundo efecto. En conclusión, el efecto total es negativo. Es decir, una subida en el tipo de interés significa un pago mayor de intereses en el futuro, esto inducirá a pedir una menor cantidad de dinero prestado y así mismo consumirá menos en el periodo inicial.

Si el individuo fuera un prestamista el signo del segundo efecto es negativo ya que aunque c_1 es más caro, el aumento de la tasa de interés permitiría que siguiera ganando lo mismo o más, disminuyendo su ahorro o manteniéndolo inalterado. Por lo tanto, el signo del efecto total resultante depende de las magnitudes de los otros efectos.

Chapter 7

Elección bajo incertidumbre

(Resumen de: Bibliografía)

La incertidumbre forma parte de la vida. Los individuos se enfrentan a riesgo de que se presenten diversas situaciones (contingencias). Para el estudio de las decisiones del individuo bajo incertidumbre es necesario definir dos conceptos: estados contingentes o de la naturaleza (del mundo) y mercancías contingentes. Los estados de la naturaleza son todos los posibles resultados de un evento; por ejemplo, que llueva o no llueva. Las mercancías contingentes son aquellas que son propias de un único estado de la naturaleza; por ejemplo, una sombrilla cuando está lloviendo es una mercancía distinta a una sombrilla cuando no está lloviendo, de hecho tienen precios distintos y no se pueden conseguir en el otro estado contingente.

Partiendo de las mercancías contingentes, pueden definirse los derechos contingentes como la compra de un derecho sobre un bien en el futuro si se da determinado estado del mundo.¹ Si un individuo compra un seguro contra incendio y hay dos estados posibles (hay incendio o no hay incendio), el individuo recibirá el pago del seguro si se da la situación mala (incendio) pero no si se da la buena. En este caso el individuo compró un derecho contingente para obtener el pago de un seguro sólo si la situación es mala. Es por esto que existen instituciones financieras y aseguradores que disminuyen tal riesgo. Las alternativas inciertas tienen una estructura que podemos usar para restringir las preferencias que los individuos racionales deben mantener. Al utilizar dicha estructura podremos derivar implicaciones más fuertes que las que se han tomado hasta ahora.

Comenzaremos nuestro estudio de elección bajo incertidumbre considerando un escenario en donde las alternativas con resultados inciertos son describibles por ponderaciones utilizando probabilidades conocidas. De esta forma desarrollaremos un mecanismo para modelar el riesgo. Estas representaciones de al-

¹Se dice que los mercados contingentes son completos, si a través de la compra de los derechos contingentes disponibles en el mercado el individuo puede “asegurarse” para todos los estados del mundo, es decir si puede garantizar un nivel de riqueza igual para todos los estados del mundo posibles.

alternativas riesgosas se llaman loterías. Supondremos que los individuos poseen preferencias racionales sobre las loterías. Después procedemos a derivar el teorema de la utilidad esperada, un resultado importante que dice que bajo ciertas condiciones podemos representar las preferencias mediante una función de utilidad esperada.

7.1 Teoría de la Utilidad Esperada

Se supone un consumidor que enfrenta una elección entre un número de alternativas riesgosas. Cada alternativa puede resultar en uno de varios resultados posibles, pero el resultado o consecuencia que realmente ocurrirá es incierto en el momento de tomar la decisión. Se define $C = (c_1, \dots, c_N)$ como el conjunto de posibles resultados o consecuencias ante N posibles estados de la naturaleza. Estos pueden ser canastas de consumo, en este caso $C = X$, aunque C también puede consistir en pagos monetarios.

A cada alternativa riesgosa se le asigna una probabilidad p_n de que ocurra, donde $0 \leq p_n \leq 1$. Así, si la probabilidad de que obtengamos el pago monetario c_1 es $p_1 = 0.1$ significa que si vivimos dicha situación diez veces esperamos que una vez obtengamos ese pago, aunque *probablemente* no se de o se de más veces. En general si vivimos dicha situación n veces, esperaremos ganar ese pago $0.1 \cdot n$ veces, esto será cierto si n es suficientemente grande. En principio asumiremos que estas probabilidades son *objetivas y conocidas*. Para representar las alternativas riesgosas utilizaremos el concepto de loterías.

Definition 74 Una Lotería Simple L es una lista $L = (p_1, \dots, p_N)$, donde $p_n \geq 0$ para todo n y $\sum_{n=1}^N p_n = 1$, donde p_n es la probabilidad de que ocurra el evento n . Las loterías también pueden escribirse como $L = (c_1, \dots, c_n; p_1, \dots, p_n)$.

Note que en el caso de que tengamos tres estados posibles, una lotería puede representarse como un punto de un triángulo equilátero cuya altura sea uno. El

pago esperado de una lotería se dará como $E(C) = p_1 c_1 + \dots + p_N c_N = \sum_{i=1}^N p_i c_i$.

Esto también es conocido como un promedio ponderado ya que la suma de las probabilidades es igual a uno y estas se utilizan como factores de ponderación. De esta forma, si una de sus alternativas es un pago monetario muy alto pero la probabilidad de ganarlo es demasiada baja, su pago esperado no puede ser muy alto por efecto de la ponderación.

7.1.1 Preferencias entre loterías

Ya que hallamos una forma de modelar las alternativas riesgosas, ahora estudiaremos las preferencias que un individuo puede tener sobre ellas. Sea \mathcal{L} el conjunto de todas las loterías simples sobre el conjunto de resultados C . Se

supone que el consumidor tiene una relación de preferencias racional \succsim en \mathcal{L} , la cual es completa y transitiva, que permite comparar cualquier par de loterías.² Además de lo anterior, se colocan dos supuestos adicionales: que dichas preferencias cumplan el *axioma de continuidad* y el *axioma de independencia*.

La continuidad significa que cambios pequeños en las probabilidades asociadas a cada evento, no alteran la naturaleza del ordenamiento entre las loterías. Por ejemplo, si “un viaje placentero en carro” es preferido a “quedarse en casa”, entonces una combinación del resultado “un viaje placentero en carro” con una pequeña probabilidad de “morir por un accidente de tránsito” seguirá siendo preferido a “quedarse en casa”. De nuevo hacemos esto para evitar las preferencias lexicográficas (“primero la seguridad”) para alternativas con probabilidad cero e algún resultado (en este caso “morir por un accidente de tránsito”). De esta forma el axioma de continuidad implica la existencia de una función de utilidad que representa las preferencias.

Nuestro segundo supuesto es el axioma de independencia, que permite imponer más estructura sobre la función de utilidad.³ Las relaciones de preferencia satisfacen el axioma de independencia si para cualquier terna de loterías tenemos que

$$\text{Si } L \succ L' \Leftrightarrow \alpha L + (1 - \alpha)L'' \succ \alpha L' + (1 - \alpha)L''$$

La independencia implica que al tener una preferencia establecida entre dos loterías, si cada una de estas se combina con una tercera, la combinación (o lotería compuesta) preferida debe ser aquella que incluye la lotería que se prefirió inicialmente, es decir, el ordenamiento no depende (es independiente) del uso de una tercera lotería.

El axioma de independencia es considerado como el corazón de la teoría de elección bajo incertidumbre (Ver Mas Collé et al.(1995): 172). Esta suposición tiene un significado distinto en la teoría básica de elección porque la combinación entre dos canastas puede no ser mejor (convexidad: medio vaso de agua con medio de leche) pero aquí va a pasar una o la otra (probabilidad de 0.5 tomar leche o 0.5 de tomar agua). La suposición de independencia esta relacionada a

la representabilidad de las preferencias sobre las loterías mediante una función de utilidad que tiene la forma de utilidad esperada.

Definition 75 *La función de utilidad $U : \mathcal{L} \rightarrow R$ es una utilidad esperada si hay una asignación de números (u_1, \dots, u_N) para los N resultados posibles, tal que para cada lotería simple $L = (p_1, \dots, p_N) \in \mathcal{L}$ se tiene que:*

$$U(L) = u_1 p_1 + \dots + u_N p_N$$

Esta forma de utilidad es llamada *función de utilidad esperada von Neumann-Morgenstern (V.N.-M)*. A esta función de utilidad esperada se le pueden realizar

²Es necesario tener en cuenta que este supuesto es aún más restrictivo bajo este contexto que en la elección bajo certidumbre.

³El axioma de independencia fue propuesto por von Neumann y Morgenstern (1944) como un resultado accidental en teoría de juegos.

transformaciones lineales y seguirán representando las mismas preferencias.⁴ Por medio del Teorema de la Utilidad Esperada podemos demostrar que si las preferencias de un individuo sobre las loterías cumplen continuidad e independencia podemos representarlas por medio de una función de utilidad esperada.

Proposition 76 (Teorema de la Utilidad Esperada) *Si las preferencias del consumidor sobre las loterías satisfacen los axiomas de continuidad e independencia, entonces estas preferencias son representables por una función de utilidad de la forma de la Utilidad Esperada. En este caso, se puede asignar un valor u_n a cada resultado, de tal forma que para cualquier par de loterías $L = (p_1, \dots, p_N)$ y $L' = (p'_1, \dots, p'_N)$, se tiene:*

$$L \succ L' \text{ si y solo si } \sum_{n=1}^N u_n p_n \geq \sum_{n=1}^N u_n p'_n$$

Proof. Esta demostración se sale del contexto de este curso básico. Esta prueba puede encontrarse en MWG. ■

Ya que en el momento de tomar la elección, es decir de escoger la lotería que prefiere jugar, el individuo no conoce el resultado final, el individuo tomará su decisión basándose en la *Utilidad Esperada*, ya que esta indica cuál será la utilidad promedio obtenida de jugar cada lotería.

7.1.2 Discusión sobre la teoría de la utilidad esperada

Una primera ventaja de la utilidad esperada es que conveniente analíticamente. Es muy fácil trabajar con utilidad esperada pero difícil hacerlo sin ella. Una segunda ventaja es de tipo normativo ya que la utilidad esperada puede ser una guía para actuar. Sin embargo, usualmente la conveniencia va en contravía de lo que pasa en la realidad. Allais (1953) mostró a través de un ejemplo, conocido como la paradoja de Allais, los problemas que puede tener el axioma de independencia. Este ejemplo constituye el desafío más famoso y viejo a la teoría de la utilidad esperada.

Example 77 *Suponga que existen tres premios monetarios posibles:*

Primer premio: 2'500.000

Segundo premio: 500.000

Tercer premio: 0

Suponga que tiene dos loterías, $L_1 = (0, 1, 0)$ y $L'_1 = (0.1, 0.89, 0.01)$. Ahora suponga que existe una segunda decisión donde debe escoger entre $L_2 = (0, 0.11, 0.89)$ y $L'_2 = (0.1, 0, 0.9)$. Es común que los individuos revelen que sus preferencias son $L_1 \succ L'_1$ y que $L'_2 \succ L_2$. Lo primero dice que el individuo prefiere la certeza de recibir 500000, que el riesgo de ganar más pero con alguna probabilidad de quedarse sin nada. El segundo dice que prefiero apostarle a la mayor ganancia

⁴Una transformación lineal es de la forma $\hat{U}(L) = \beta U(L) + \gamma$. Note que una transformación lineal es monótona, pero no todas las transformaciones monótonas son lineales.

aunque se aumente un poco la probabilidad de no ganar nada. Sin embargo estas elecciones no son consistentes con la teoría de la utilidad esperada.

Supongamos que tenemos una función de utilidad v.N-M. Sean u_{25} , u_5 y u_0 las utilidades asociadas a los pagos. Decir que $L_1 \succ L'_1$ significa que $u_5 > 0.1u_{25} + 0.89u_0 - 0.089u_5$. Si sumamos a cada lado $0.89u_5$ obtendremos que $0.11u_5 + 0.89u_0 > 0.1u_{25} + 0.9u_0$. Por eso el individuo debería escoger $L_2 \succ L'_2$.

Debido al ejemplo anterior y otros más, la búsqueda de una teoría útil de elección bajo incertidumbre que no descansa en el axioma de independencia es una de las áreas de investigación. Ver Machina (1987), Hey y Orme (1994), Hey(1996) y el Handbook of Experimental Economics.

7.2 Loterías y Aversión al Riesgo

En varios escenarios económicos, los individuos muestran cierta aversión al riesgo o revelan un gusto por este. De ahora en adelante trabajaremos en alternativas riesgosas cuyos resultados son cantidades de dinero.

Definition 78 *Un consumidor es averso al riesgo si para cualquier lotería L cuyo valor esperado es w , la utilidad que genera w es mayor o igual a la utilidad esperada que genera L . Si el consumidor siempre es indiferente entre estas dos alternativas, es neutral al riesgo. Por último, se dice que es amante al riesgo si la utilidad que genera la lotería L es al menos tan buena como la utilidad que genera w .*

$$\text{Averso al riesgo:} \quad U(L) \leq U(w)$$

$$\text{Neutral al riesgo:} \quad U(L) = U(w)$$

$$\text{Amante al riesgo:} \quad U(L) \geq U(w)$$

La aversión al riesgo se caracteriza porque cada peso (o unidad monetaria) adicional que tenga el individuo le da una utilidad adicional menor a la que perdería si tuviera un peso (o unidad monetaria) menos; esto implica que la utilidad marginal de la riqueza es decreciente, y por tanto la función de utilidad es cóncava. Análogamente, puede deducirse que para un consumidor *neutral al riesgo* la utilidad marginal de la riqueza es constante, y para uno *amante al riesgo* es creciente.

Definition 79 *El equivalente de certeza es el monto de dinero para el cual el individuo es indiferente entre la apuesta o lotería L y el monto seguro $c(L, u)$*

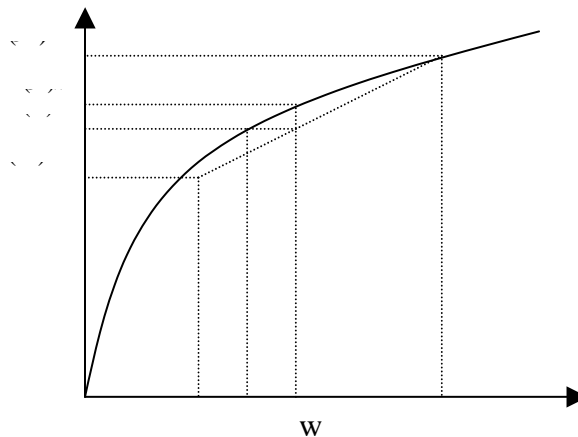
$$U(c(L, u)) = U(L)$$

El *equivalente de certeza* indica el monto mínimo de ingreso seguro que hay que ofrecer al individuo para que decida no jugar la lotería L .

Proposition 80 *Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *El consumidor es averso al riesgo*
2. *La función de utilidad de la riqueza es cóncava.*
3. *El equivalente de certeza $c(L, u)$ es menor al valor esperado de la lotería.*

La 7.2 muestra esta proposición. Suponga que existe una lotería que le asigna probabilidades a las canastas c_1 y c_2 , en este caso el valor esperado de la lotería es w . Si la función de utilidad de este individuo es cóncava entonces la utilidad que genera w es mayor que la utilidad que genera la lotería. Note además que el equivalente de certeza es menor al valor esperado de la lotería. El caso cuando el individuo es amante del riesgo la función de utilidad será convexa. Si el individuo es neutral al riesgo la función de utilidad es lineal.



Función de utilidad de un individuo averso al riesgo.

Si el individuo es averso al riesgo preferirá la diversificación. En términos de activos financieros, un individuo invertirá en activos correlacionados negativamente, es decir, que sus rendimientos varíen en sentido contrario. Una estrategia podría ser invertir en sectores de distintas industrias no complementarias.

Example 81 Demanda de seguro

Supongamos que un individuo tiene activos por 3'500.000 entre ellos se encuentra un carro cuyo valor es de 1'000.000. Suponga que este individuo piensa ir de viaje a Santa Marta y por lo tanto tiene una probabilidad de 0.01 que le roben el carro. ¿Cuanto estará dispuesto a pagar por un seguro contra robos?

Para modelar este caso supongamos que solo existen dos estados de la naturaleza: uno bueno donde no le pasa nada y uno malo donde sufre la pérdida. Suponga que su ingreso es de 3'500.000. Supongamos que el individuo puede

comprar un seguro de magnitud K para el que paga una fracción γK . Así, el individuo obtendrá $2'500.000 + K - \gamma K$ en el caso que le ocurra el estado malo, es decir, con una probabilidad de 0.01; y obtendrá $3'500.000 - \gamma K$ en el caso del estado bueno, es decir, con probabilidad de 0.9. Así el individuo está renunciando a γK pesos en el estado bueno para obtener $K - \gamma K$ en el estado malo. Esto implica que la tasa marginal de sustitución debe mantener una proporción de $-\gamma/(1 - \gamma)$ para que sea óptima dado que la pendiente de la restricción presupuestal será esta misma. La elección de K dependerá de las preferencias del individuo.

El gráfico 7.1 muestra que un seguro permite renunciar a un cierto consumo en el periodo bueno con el fin de consumir más en el periodo malo. Si no compra el seguro el individuo deberá consumir en la dotación. Por el contrario, si piensa comprar un seguro, podrá comprar la cantidad que desee con el fin de maximizar su utilidad. De nuevo, esta elección dependerá de cuando las curvas de indiferencia serán tangentes a la restricción presupuestal.

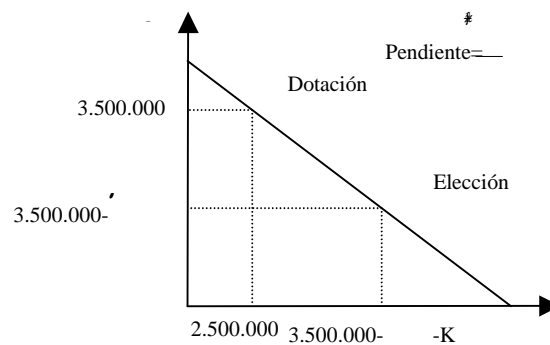


Figure 7.1: Recta presupuestaria ante una compra de un seguro.

Example 82 Aseguramiento

Considere un individuo estrictamente averso al riesgo quién tiene una riqueza inicial de w pero que corre el riesgo de perder D . La probabilidad de esta pérdida es π , así que el individuo decide asegurarse. Suponga que una unidad de seguro cuesta q y paga 1 si ocurre la pérdida. Por lo tanto, si el individuo demandara α unidades de seguro, el ingreso del individuo será $w - \alpha q$ si no se da la pérdida y $w - \alpha q - D + \alpha$ si la pérdida ocurre. De esta forma el ingreso esperado de este individuo es $w - \pi D + \alpha(\pi - q)$. El problema del individuo será escoger el nivel óptimo de α de tal forma que maximice su utilidad esperada:

$$\text{Max } (1 - \pi)u(w - \alpha q) + \pi u(w - \alpha q - D + \alpha)$$

Si α^* es un óptimo debe satisfacer la condición de primer orden:

$$-q(1 - \pi)u'(w - \alpha q) + \pi(1 - q)u'(w - \alpha q - D + \alpha) = 0, \text{ si } \alpha^* > 0.$$

7.2.1 Cómo medir la aversión al riesgo

Definition 83 Dada una función de utilidad de la riqueza $U(w)$, el coeficiente de aversión absoluta al riesgo es:

$$r_A(w) = -\frac{U''(w)}{U'(w)}$$

El grado de aversión al riesgo está directamente relacionado con la curvatura de la función de utilidad: a mayor curvatura, mayor aversión al riesgo; por esto, se utiliza la segunda derivada para calcular esta medida. Sin embargo, se divide entre la primera derivada para evitar que el coeficiente varíe cuando se hagan transformaciones *lineales* positivas de la función de utilidad. Si este coeficiente es positivo el individuo se considera averso al riesgo, si es cero es neutral y si es negativo es amante al riesgo.

Esta a su vez es proporcional a la cantidad que pagará una persona por un seguro contra un juego justo.

Sin embargo, este coeficiente puede variara dependiendo del nivel de ingreso del individuo. Por ejemplo, si el coeficiente es creciente quiere decir que entre mayor ingreso el individuo es más averso al riesgo.⁵ Para medir este efecto se desarrolló otra medida de aversión al riesgo: el *coeficiente de aversión relativa al riesgo*:

$$r_r(w) = -w \frac{U''(w)}{U'(w)}$$

7.2.2 Información

En contextos bajo incertidumbre la información es primordial para la toma de buenas noticias. Como se dijo en un principio, los argumentos expuestos anteriormente suponen que el individuo tienen unas probabilidades objetivos sobre los eventos, este supuesto necesita que el individuo posea la suficiente información para predecir las probabilidades correctas. Si un individuo basa su decisión de inversión en información no confiable puede perder todo su dinero.

Example 84 A tres amigos, Ximénez, Maín y Porfirio, se les da la oportunidad de invertir en un portafolio de activos, en el cual el 25% de las veces se gana \$100 y el 75% se pierde esa misma cantidad. Los tres compañeros poseen una renta de \$100. La función de utilidad de la riqueza para Ximénez es $U_x(w) = w^{1/2}$, la de Maín es $U_m(w) = w$ y la de Porfirio es $U_p(w) = w^2$.

1. ¿Cuál es el valor esperado de la riqueza obtenida en esta inversión?

$$E[L] = 0.25 * 200 + 0.75 * 0 = 50$$

⁵Aunque normalmente en la realidad el coeficiente es decreciente: entre mayor sea su ingreso existe una mayor disposición a apostararlo.

2. Muestre qué decisión tomará cada uno de estos personajes si se les da a escoger entre un ingreso seguro de $E[L]$ y la inversión.

Ximénez: Escogerá el ingreso seguro ya que

$$U_x(L) = 0.25 * (200)^{1/2} + 0.75 * (0)^{1/2} = 3.535534$$

$$U_x(E[L]) = 50^{1/2} = 7.07106$$

Maín: le será indiferente la inversión o el ingreso seguro

$$U_m(L) = 0.25 * (200) + 0.75 * (0) = 50$$

$$U_m(E[L]) = 50$$

Porfirio: Escogerá la inversión

$$U_p(L) = 0.25 * (200)^2 + 0.75 * (0)^2 = 10000$$

$$U_p(E[L]) = 50^2 = 2500$$

3. Si existiera la posibilidad de comprar un seguro para protegerse contra la pérdida en la inversión. ¿cuál sería la cantidad máxima (x) que Ximénez estaría dispuesto a comprar ese seguro?

$$U_x(200 - x) = 3.535534$$

$$(200 - x)^{1/2} = 3.535534$$

$$x = 187.5$$

de esta forma Ximénez estaría dispuesto a pagar hasta \$187.5 para asegurarse contra la inversión, esto es conocido como el equivalente de certeza.

Part II

Teoría del Productor

Chapter 8

Producción

(Resumen de MWG Cap. 5, Cap.3, *Advanced Microeconomic Theory*. Jehle y Reny, Cap. 18 Varian, Cap. 11 Nicholson)

Ahora estudiaremos el proceso de cómo las mercancías consumidas son producidas. El lado de la oferta se compone de un número de actividades productivas llamadas Firmas. Y supondremos que estas firmas no están organizadas entre ellas, es decir, hay competencia perfecta.

Varias preguntas se pueden hacer de la firma (qué preguntas quieren saber ustedes?) cómo se maneja? Quién es el dueño?, como se organiza?, que puede hacer?. Aquí nos concentraremos en sólo una (no porque las otras preguntas no sean interesantes), cómo transforma la firma los insumos en productos?

Comenzaremos introduciendo el conjunto de producción, que representa las actividades de producción o planes de producción, que son tecnológicamente factibles. Además discutiremos algunas de sus propiedades.

Después vamos a introducir el objetivo de las firmas que consiste en maximizar los beneficios. Allí hablaremos de la Función de Beneficios y de la Función de Oferta. Relacionado con la maximización de beneficio tendremos la minimización de los costos. Allí también se hablará de la Función de Costo Mínimo y las Demandas Condicionadas de factores (parecidas a las hicksianas). De nuevo existirá una teoría de dualidad asociada a estas dos funciones. Por último se analizará la geometría de los costos y la producción.

8.1 Conjuntos de producción

Así como antes teníamos un espacio de consumo, aquí vamos a tener un **plan de producción o vectores de producción** (ψ) que describirá los **insumos** (x) y los **productos** (y) derivados del proceso. Un plan de producción se denotará como el vector $\psi = (x, y)$.¹ Los ingredientes necesarios para producir

¹Si nos complicáramos se tendría: Se considera una economía con L commodities. Un vector de producción es un vector $y = (y_1, \dots, y_L) \in R^L$ que describe los productos netos de los L commodities de un proceso de producción. Se adoptará la convención que un insumo

se denominan factores de producción. Se entenderá por *bienes de capital* los factores de producción aquellos que a su vez son producidos (i.e. máquinas) y serán distintos al *capital financiero*. Normalmente nos referiremos a los insumos y productos como variables flujo.²

El conjunto de los planes factibles de producción está limitado por las restricciones tecnológicas. El conjunto de todos los planes de producción tecnológicamente viables se denomina **Conjunto de Posibilidades de Producción** Y (por tanto $\psi \in Y$). Si sólo tuviéramos un producto y un insumo, Y podría ser algo como lo que muestra la figura 8.1. Existe una **Función de producción** que mide el volumen máximo de producción que puede obtenerse con una cantidad dada de factores, es decir que si la firma es eficiente se ubicará en esta *frontera*.³

tendrá signo negativo y un producto tendrá signo positivo. Pueden existir valores iguales a 0 y lo que significa es que ese proceso no genera un producto en ese commodity.

Ej. Si $L = 5$ siendo el vector de producción $y = (-5, 2, -6, 3, 0)$ que significa que se producen 2 y 3 unidades de los bienes 2 y 4, mientras que 5 y 6 unidades de los bienes 1 y 3 son utilizados mientras que el bien 5 no es ni producido ni utilizado.

los planes de producción posibles son conocidos como el *conjunto de producción* que es denotado como $Y \subset R^L$ y $y \in Y$ es posible, y cualquier $y \notin Y$ no lo es.

El conjunto de producción es llamada como la *función de transformación* $F(\cdot)$ la cual tiene la propiedad de $Y = \{y \in R^L : F(y) \leq 0\}$ y $F(y) = 0$ si y solo si y es un elemento de la frontera de Y . El conjunto de puntos frontera de Y , $\{y \in R^L : F(y) = 0\}$ se conoce como la *frontera de transformación*

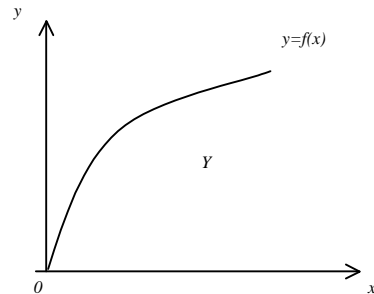
Si $F(\cdot)$ es diferenciable y el vector de producción \bar{y} satisface $F(\bar{y}) = 0$ entonces la *tasa marginal de transformación (TMT) de los insumo l y k* está dada por

$$TMT_{lk}(\bar{y}) = \frac{\partial F(\bar{y}) / \partial y_l}{\partial F(\bar{y}) / \partial y_k}$$

lo cual es una medida de cuanto podría incrementarse el producto del bien k si la firma decrece el producto del bien l en una unidad marginal. La pendiente de la frontera de transformación está dada por la $-TMT$.

²Una variable flujo se caracteriza porque no se acumula, es la utilización de los factores en un lapso de tiempo. Por el contrario, una variable stock es la cantidad de los factores que se va acumulando. El ejemplo más clásico para explicar esta diferencia es con una bañera. La cantidad de agua que va cayendo a la bañera es la variable flujo, mientras que la cantidad de agua acumulada en la bañera es la variable stock. En el caso de los factores, por ejemplo, es el número de horas máquinas el que es relevante para el proceso productivo, no el número de máquinas.

³En cursos más avanzados la notación cambiará y a los insumos se les asignará un signo negativo para diferenciarlos del producto



La *función de producción* $f(x)$ da el monto máximo de y que puede ser producida usando los montos de insumos $(x_1, \dots, x_{L-1}, x_L) \geq 0$. i.e si el producto es el bien L la función de producción $f(\cdot)$ da el siguiente conjunto de producción $Y = \{(x_1, \dots, x_{L-1}, y) : y - f(x_1, \dots, x_{L-1}) \leq 0 \text{ y } (x_1, \dots, x_{L-1}) \geq 0\}$.⁴

A continuación nombraremos las propiedades de los conjuntos de producción, algunas de estas son exclusivas y se toman cada una dependiendo de las circunstancias; es decir, un conjunto de producción no necesariamente tiene que cumplir todas las propiedades.

8.1.1 Propiedades de los conjuntos de producción

1. *Y es no vacío.* Este supuesto dice que la firma siempre tiene por lo menos un plan.
2. *Y es cerrado.* Esto quiere decir que incluye su límite o frontera. En este caso la función de producción es continua.

Se habla de tecnologías regulares si se cumplen las anteriores dos propiedades.

3. *Todo cuesta (no free lunch).* No puedo producir si no utilizo insumos. *No es posible producir algo de nada.* La 8.1 muestra un conjunto que no cumple esta propiedad.
4. *Posibilidad de inacción;* es decir, $0 \in Y$. Esta propiedad dice que el plan donde no compra insumo ni produce nada es factible, la firma puede decidir no hacer nada. Existen casos donde esta propiedad no se cumple, cuando este sea el caso se dirá que existen costos hundidos. Los costos hundidos se dan cuando las decisiones de producción ya se han tomado y

⁴En el caso que se hiciera con la notación avanzada esto quedaría como: La *función de producción* $f(z)$ da el monto máximo de q que puede ser producida usando los montos de insumos $(z_1, \dots, z_{L-1}) \geq 0$. i.e si el producto es el bien L la función de producción $f(\cdot)$ da el siguiente conjunto de producción $Y = \{(-z_1, \dots, -z_{L-1}, q) : q - f(z_1, \dots, z_{L-1}) \leq 0 \text{ y } (z_1, \dots, z_{L-1}) \geq 0\}$.

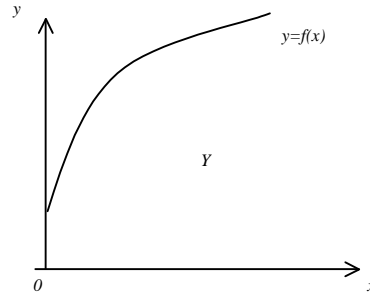


Figure 8.1: Cuando se viola no free lunch

la entrega de insumos ya se ha firmado antes mediante un contrato, por ejemplo el arriendo de un local. La 8.2 muestra el caso donde existen costos hundidos.

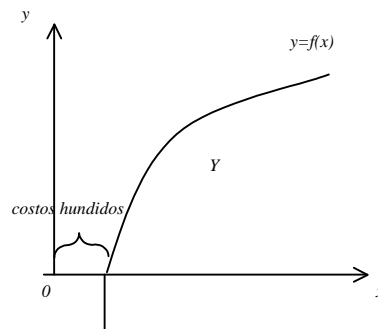


Figure 8.2: Cuando se viola la posibilidad de inacción

5. *Libre disposición.* Se mantiene si la absorción de cualquier monto adicional de insumos sin ninguna reducción en el producto es siempre posible. En otras palabras, esta propiedad implica que la firma puede comprar más insumo y seguir produciendo lo mismo que antes (¿es esto eficiente?). *La interpretación es que el monto extra de insumos (o productos) pueden ser dispuestos o eliminados sin ningún costo.* Esto implica la existencia de tecnologías monótonas y que la función de producción sea no decreciente en los insumos.

6. *Irreversibilidad.* No se puede producir los insumos con los productos. *Es imposible revertir un proceso tecnológico para transformar un monto de producto en la misma cantidad del insumo que fue utilizado para generarlo.* Por ejemplo si el tiempo es un factor de producción, no se puede devolver el tiempo con el producto.
7. *Retornos no crecientes a escala.* Para todo $\psi \in Y$ se tiene $\alpha\psi \in Y$ para cualquier escalar $\alpha \in [0, 1]$: si yo multiplico todos los insumos por una constante entre cero y uno, el producto se multiplicará por esa misma constante o menos. Esta propiedad indica que la inacción es posible y que la función de producción es homogénea de grado menor que uno.
8. *Retornos no decrecientes a escala.* Para todo $\psi \in Y$ se tiene $\alpha\psi \in Y$ para cualquier escalar $\alpha \geq 1$: en contraste con el anterior, si multiplico tanto los insumos como el producto por una constante mayor a uno, el nuevo plan es factible. En este caso la función de producción será homogénea mayor a uno.
9. *Retornos constantes a escala.* es la conjunción de las propiedades 7) y 8). Si yo multiplico por cualquier constante, el producto queda multiplicado por esa constante. Lo que implica que para todo $\psi \in Y$ se tiene $\alpha\psi \in Y$ para cualquier escalar $\alpha \geq 0$. Esta propiedad se satisface únicamente si $f(\cdot)$ es homogénea de grado 1.
10. *Aditividad (libre entrada).* Si $\psi, \psi' \in Y$ entonces debe cumplirse que $\psi + \psi' \in Y$, más aún, $Y + Y \subset Y$. Esta propiedad implica que si yo sumo dos planes de producción, estos son viables. Esta propiedad también puede ser vista a través de la libre entrada de las empresas y así formar un conjunto de producción agregado. La interpretación económica de esto es que si ψ y ψ' son vectores de producción posibles entonces uno podría establecer dos plantas independientes para llevar a cabo la producción y por tanto el vector de producción resultante sería $\psi + \psi'$.
11. *Convexidad.* Esto lleva a tecnologías convexas: $\psi, \psi' \in Y$ y $\alpha \in [0, 1]$, entonces $\alpha\psi + (1 - \alpha)\psi' \in Y$. Esta propiedad dice que las combinaciones entre planes de producción son factibles. Esta propiedad tiene dos implicaciones. La primera es que las combinaciones no balanceadas de insumos no son más productivas que aquellas balanceadas por razones de costos. La segunda es que *Y es convexo si y solo si $f(x)$ es cuasiconcava.* De hecho, si existe posibilidad de inacción, la convexidad implica que el conjunto de producción tenga rendimientos no crecientes a escala.

Se puede también hacer la distinción entre el corto plazo y el largo plazo. El **corto plazo** es un período de tiempo tan corto que por lo menos uno de los factores no se puede modificar (*factor productivo fijo*). Por ejemplo, las compras de bienes de capital únicamente se pueden modificar en el largo plazo, en este caso, la función de producción tomaría la forma $y = f(\bar{x}_i, x_{-i})$. El **largo**

plazo es un período de tiempo lo suficientemente largo para variar la cantidad de todos los factores. En el largo plazo no hay factores fijos ($y = f(x_i, x_{-i})$). A corto plazo, las empresas alteran el tamaño de la planta. Todos los factores fijos a corto plazo representan los resultados de decisiones a largo plazo tomadas anteriormente en función de las estimaciones de las empresas sobre lo que sería rentable producir y vender.

La frontera de los conjuntos de producción, denotada por la función de producción, puede ser expresada en un espacio donde únicamente se tienen las combinaciones de insumos necesarios para producir una determinada cantidad de producto, esas curvas se denominan isocuantas.

Isocuantas: Ejemplos de tecnologías

Una isocuanta es semejante a una curva de indiferencia para el caso del productor. Lo que expresará una isocuanta son las diferentes combinaciones de factores que le permiten a una firma alcanzar el mismo nivel de producto. Los valores que toman las isocuantas son las cantidades del bien que se pueden producir y no un nivel de utilidad. Su valor vendrá determinado por la tecnología y no tienen el mismo carácter arbitrario que los números asignados a las curvas de indiferencia. En otras palabras, si una función de producción está dada por $y = f(x)$ entonces una isocuanta será $\bar{y} = f(x)$. En la mayoría de los casos, las funciones de producción se asumirá con sólo dos factores que usualmente se especifican como bienes de capital (K) y trabajo (L). Sin embargo, normalmente se presentarán los insumos de forma general (x_i).

1. **Proporciones fijas:** supongamos que estamos produciendo mochilas, una mochila se hace con $1/a$ personas (x_1) y $1/b$ kilos de lana (x_2), no serviría de nada tener más personas o más lana trabajando en la misma mochila. Por tanto la función de producción tendrá la siguiente forma

$$f(x_1, x_2) = \text{Min} \{ax_1, bx_2\}$$

2. **Sustitutos perfectos:** Cuando en la producción de un bien se utilizan dos insumos que podrían sustituirse a una tasa constante en el proceso de producción.

$$f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$$

3. **Cobb-Douglas:**

$$f(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$$

4. **CES:**

$$f(x_1, x_2) = [ax_1^{-\rho} + (1-a)x_2^{-\rho}]^{-\delta/\rho}$$

8.1.2 Definiciones

De ahora en adelante supondremos que los conjuntos de producción son no vacíos, cerrados y que cumplen la libre disposición. Teniendo en cuenta estas propiedades sabremos que:

- *Cuánto más alejada esté la isocuanta del origen, mayor será el nivel de producción:* Cuántos más factores productivos utilice la empresa, mayor será la producción si la empresa está produciendo eficientemente.
- *Isocuantas no se cortan:* Es una situación coherente si la empresa está produciendo de manera eficiente
- *Isocuantas tienen pendiente negativa:* Si una isocuanta tuviera una pendiente positiva, la empresa podría producir la misma cantidad de producción con relativamente pocos factores o con relativamente muchos factores. La producción con muchos factores sería ineficiente.

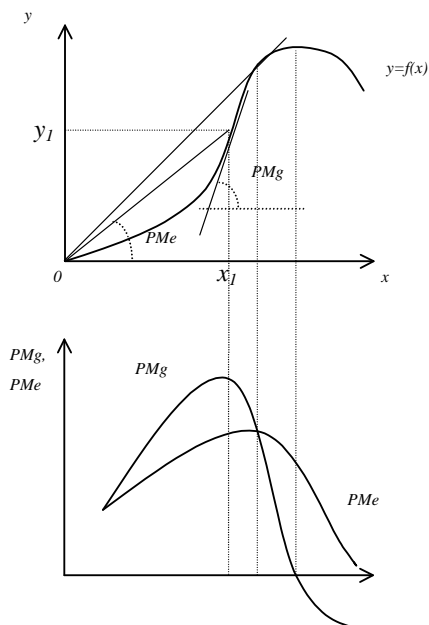
A continuación se presentarán algunas definiciones que servirán para analizar los procesos tecnológicos de las firmas:

1. El *producto marginal del insumo l* (PMg_l) se define como $\frac{\partial f(z)}{\partial z_l}$: Es la tasa a la cual el producto cambia por un cambio de una unidad adicional del insumo l . Gráficamente sería como se muestra en la figura 2⁵
2. El *Producto Medio del insumo l* (PMe_l) se definirá como $\frac{f(x)}{x_l}$ y es equivalente a la productividad del insumo: Véase la figura 2
3. Puede definirse la *Tasa Marginal de Sustitución Técnica* ($TMST_{lk}$) análogamente como se definió la Tasa Marginal de Sustitución: siendo $y = f(x_l, x_k)$ entonces $dy = \frac{\partial f(x_l, x_k)}{\partial x_l} dx_l + \frac{\partial f(x_l, x_k)}{\partial x_k} dx_k = 0$ de aquí se halla que $\frac{dx_l}{dx_k} = -\frac{\partial f(x_l, x_k)/\partial x_k}{\partial f(x_l, x_k)/\partial x_l}$. Que es simplemente la razón de las Productividades Marginales de distintos insumos

$$TMST_{lk}(x) = \frac{\partial f(x)/\partial z_l}{\partial f(x)/\partial z_k} = \frac{PMg_l}{PMg_k}$$

Mide el monto adicional del insumo k que debe ser usada para mantener el nivel de producto $q = f(x)$ cuando el monto del insumo l decrece marginalmente (es el análogo a la relación marginal de sustitución en la teoría del consumidor). Es una medida de cuanto puedo sustituir entre dos insumos para producir la misma cantidad de un bien. Medirá la pendiente de la isocuanta.

⁵ Existe por tanto la *Ley de los rendimientos marginales decrecientes (o producto marginal decreciente)*: si una empresa sigue aumentando la utilización de un factor productivo, manteniendo constantes todos los demás factores productivos y la tecnología, los correspondientes aumentos de la producción serán cada vez más pequeños.



4. *La Elasticidad de Sustitución* (σ_{lk}).⁶ La elasticidad de sustitución mide la variación porcentual del cociente entre los factores dividida por la variación porcentual de la TMS, manteniéndose fija la cantidad de producto. Mientras σ_{lk} sea cercana a 0 la sustitución entre los insumos es más difícil ($\sigma_{lk} = 0$ es el caso de la Leontief); Entre mayor sea la sustitución entre los insumos será más fácil ($\sigma_{lk} = \infty$ es el caso de la isocuanta lineal). Si $d(x_k/x_l)$ es la variación del cociente entre los factores y $dTMST$ es la variación de la tasa marginal de sustitución técnica, entonces la elasticidad de sustitución será:

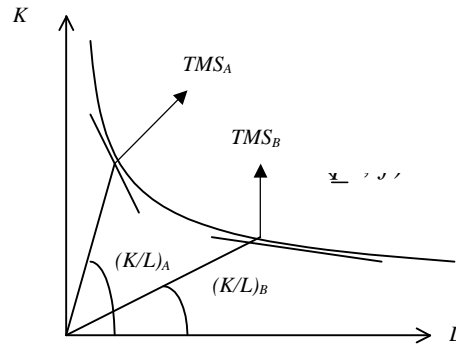
$$\sigma_{lk} = \frac{d(x_k/x_l)}{x_k/x_l} \frac{f_l(z)/f_k(z)}{d(f_l(z)/f_k(z))} = \frac{d(x_k/x_l)}{dTMST_{lk}} \frac{TMST_{lk}}{x_k/x_l} = \frac{d \ln(x_k/x_l)}{d \ln(f_l(z)/f_k(z))}$$

Esta elasticidad indica cómo varía el cociente entre las cantidades de factores cuando varía la pendiente de la curva de indiferencia (**Dejar de tarea la CES**). Note que gráficamente es lo que muestra la figura 4

Ejemplo: Para la Cobb-Douglas se tendría $y = k^a l^b$ donde $PMg_l = bk^a l^{b-1}$; $PMg_k = ak^{\alpha-1} l^b$ y por tanto $TMST_{lk} = \frac{PMg_l}{PMg_k} = \frac{bk}{al}$ para calcular la σ_{lk} se debe calcular

$$\sigma_{lk} = \frac{d(x_k/x_l)}{dTMST_{lk}} \frac{TMST_{lk}}{x_k/x_l}$$

⁶ Cuando $f(x)$ es cuasicóncava σ_{lk} no puede ser negativa,



de esta forma se tiene que

$$\frac{k}{l} = \frac{a}{b} TMS_{lk}$$

derivando se tendría que

$$\frac{d(x_k/x_l)}{dTMS_{lk}} = \frac{a}{b}$$

$$\sigma_{lk} = \frac{a}{b} \frac{\frac{bk}{l}}{\frac{ak}{l}} = 1$$

5. Los Rendimientos a Escala

- Si $f(ax_1, ax_2) > af(x_1, x_2)$ la función de producción tiene *rendimientos crecientes a escala*, lo que quiere decir es que si se aumentan todos los insumos en una misma cantidad, la cantidad total del producto aumentará más que proporcionalmente.
- Si $f(ax_1, ax_2) = af(x_1, x_2)$ la función de producción tiene *rendimientos constantes a escala*, lo que quiere decir es que si se aumentan todos los insumos en una misma cantidad, la cantidad total del producto aumentará igual que proporcionalmente.
- Si $f(ax_1, ax_2) < af(x_1, x_2)$ la función de producción tiene *rendimientos decrecientes a escala*, lo que quiere decir es que si se aumentan todos los insumos en una misma cantidad, la cantidad total del producto aumentará menos que proporcionalmente.

6. *Elasticidad producto del insumo* (μ_i): Por su parte la elasticidad producto del insumo se definirá como

$$\mu_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \frac{x_i}{f(x)} = \frac{PMg_i}{PMe_i}$$

7. *Elasticidad a escala ($e(x)$)*: Sin embargo un conjunto de producción puede presentar rendimientos crecientes a escala en algunos tramos y rendimientos decrecientes en otros. Por lo tanto, es útil contar con una medida local de los rendimientos de escala. **La elasticidad a escala** mide el aumento porcentual que experimenta el nivel de producción cuando se incrementan todos los factores un uno por ciento, es decir, cuando se incrementa la escala de operaciones. Tomando $y(t) = f(tx)$ se realiza el siguiente cálculo

$$e(x) = \frac{\partial y(t)}{\partial t} \frac{t}{y(t)} = \sum \frac{PMg_i}{PMe_i}$$

Ejemplo con la cobb-douglas: Note que $y(t) = t^{a+b}k^a l^b$ entonces $\frac{dy(t)}{dt} = (a+b)t^{a+b-1}k^a l^b$ de esta forma se tendría que

$$e(x) = \frac{\partial y(t)}{\partial t} \frac{t}{y(t)} = (a+b)t^{a+b-1}k^a l^b \frac{t}{k^a l^b} = a+b$$

es interesante ver que $e(x) = \sum \frac{PMg_i}{PMe_i} = a+b$

Chapter 9

Maximización de los beneficios

Paralelamente al estudio de la demanda del consumidor, asumimos que la empresa no tiene inferencia sobre los precios y que estos son fijos e independientes de sus planes de producción. También asumiremos que el objetivo de la firma es maximizar sus beneficios. Para esto supondremos que el conjunto de producción está dado por tecnologías regulares y monótonas (no vacío, cerrado y libre disposición). Se pueden distinguir entre dos problemas, uno de elección del nivel de producción y otro de la elección del consumo de factores. Note que el segundo simplemente incluye al primer problema ya que al determinar cuál es la cantidad de factores que se utilizarán en el proceso productivo, se estará determinando cuál es el nivel de producto.

Dado el vector de precios $p \gg 0$, y el vector de producción $y \in R^L$ que está determinado por la función $y = f(x_1, \dots, x_L)$ siendo $IT = p \cdot y$ los *Ingresos Totales (IT)* y $CT = \sum_1^L w_l x_l$ los *Costos Totales (CT)*, el problema de la firma será entonces

$$\begin{aligned} & \underset{x_i}{Max} p \cdot y - \sum_1^L w_l x_l \\ & \text{s.a } y \in Y \end{aligned}$$

Lo que es equivalente a escribir

$$\begin{aligned} & \underset{x_i}{Max} p \cdot y - \sum_1^L w_l x_l \\ & \text{s.a } y \leq f(x) \end{aligned}$$

Esto es, maximizar beneficios sujeto a las restricciones tecnológicas y a las restricciones de mercado (que se reflejan en los precios).¹ Asumiendo que sólo existen dos insumos la función de producción será $y = f(k, l)$, donde k es el capital y l la cantidad de mano de obra. Si la firma es eficiente tomará un plan de producción sobre la frontera del conjunto de producción (función de producción) o escogerá no producir. En el primer caso el problema de maximización de los beneficios será

$$\underset{k,l}{Max} \pi = p \cdot f(k, l) - wl - rk. \quad (9.1)$$

donde w será el precio del trabajo (i.e. el salario) y r el precio del capital (i.e. tasa de interés).² Las condiciones de primer orden estarán dadas por c.p.o :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial k} &= 0 : p \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} - r = 0 \\ &: p \cdot PMg_k = r \end{aligned} \quad (9.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial l} &= 0 : p \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} - w = 0 \\ &: p \cdot PMg_l = w \end{aligned} \quad (9.3)$$

Utilizado las ecuaciones 9.2 y 9.3 se obtiene

$$TMST_{lk} = \frac{PMg_l}{PMg_k} = \frac{w}{r} \quad (9.4)$$

Las ecuaciones 9.2 o 9.3 indican que el valor del producto marginal de cada insumo es igual a su costo; o, similarmente, el producto marginal iguala al costo real del insumo. En otras palabras, para maximizar los beneficios deberán igualarse el ingreso marginal que otorga el hecho de consumir una unidad más de factor con el costo marginal de consumir esa unidad adicional. Note que según estas ecuaciones $IMg_i = p \cdot PMg_i = CMg_i$ ³ siendo $i = l, k$. Si el ingreso marginal es mayor al costo marginal la empresa contratará más trabajo (capital) hasta el punto en que un trabajador (una unidad de capital) más le hace tener una variación del ingreso igual a lo que cuesta. En el caso en que nunca se igualen, la firma buscará contratar toda la cantidad de trabajo (capital) que pueda. Por el contrario, si el ingreso marginal es menor al costo marginal la empresa disminuirá la demanda de trabajo (capital) hasta que se igualen, si no es así, el individuo decidirá no demandar ninguna unidad de trabajo (capital).

Como condición de segundo orden, para asegurar que realmente se están maximizando los beneficios, tendremos que $pf''(x) \leq 0$. Es decir, si la función

¹Esta restricción también puede ser en la cantidad de insumos.

²Note que el problema también podría resolverse con el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = pY - wl - rk - \lambda(Y - f(k, l))$$

³Ya que si $IT = p \cdot f(k, l)$ y $CT = wl + rk$ entonces $IMg_l = \frac{\partial IT}{\partial l} = p \cdot f'_l$ y se tendría que el $CMg_l = \frac{\partial CT}{\partial l} = w$.

de producción es cóncava las condiciones de primer orden nos llevan a la maximización de beneficios; sin embargo, si es convexa (i.e. rendimientos crecientes), estas condiciones no asegurarán el máximo. En este caso, los óptimos serán, o bien no producir, o bien producir todo lo que se pueda. La segunda condición fundamental de la maximización del beneficio es la condición de la igualdad de los beneficios a largo plazo. Si dos empresas tienen las mismas funciones de ingreso y de costos, en el largo plazo no pueden tener beneficios distintos, ya que cada una de ellas puede imitar lo que hace la otra.

Simplificando y reemplazando en la ecuación 9.2 o 9.3 se obtendrán las *demandas no condicionadas de factores: conocidas como las demandas óptimas de los factores, es decir, la cantidad de cada factor que maximizan los beneficios dados los precios del mercado y la restricción tecnológica de la firma.*

$$\begin{aligned} l^* &= l(p, w, r) \\ k^* &= k(p, w, r) \end{aligned}$$

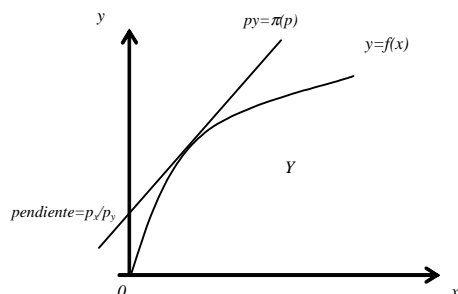
. Al reemplazar estas funciones en la función de producción se obtendrá la *función de oferta de la firma: La oferta óptima de la firma para maximizar los beneficios dados unos precios y una restricción tecnológica.*

$$y^* = f(k^*, l^*) = y(p, w, r)$$

Y simplemente reemplazando estas funciones en los beneficios se tendrá la *función de beneficios máximos: el nivel de beneficio máximo que puede alcanzarse dada una restricción tecnológica y unos precios del mercado.*

$$\pi^* = \pi(p, w, r)$$

Si tenemos un solo insumo y un producto podremos dibujar una recta tangente a la función de producción en ese punto cuya pendiente sea la relación de precios. Esta recta se llamará la línea de isobeneficios y representa todos los planes de producción que me generan los mismos beneficios. Gráficamente (figura 9), la recta *isobeneficio* corta en el eje y (producto) en $\frac{\pi(p)}{p}$, esa recta se obtiene reacomodando la ecuación 9.1 como $y = \pi/p + (w/p)x$, su pendiente es la relación de precios:



Como se demostró antes, en el punto óptimo la TMST es igual a la relación de precios. Si no fuera así, un pequeño cambio en el plan de producción debe llevarme a mayores beneficios. Sin embargo en la maximización de beneficios se pueden presentar algunos problemas. En primer lugar, puede ocurrir que no sea posible describir la tecnología por medio de una función diferenciable (caso de complementarios). Por lo tanto las condiciones de primer orden no serán apropiadas. El segundo problema radica en que la solución puede ser negativa, lo que nos lleva a una restricción más (que los insumos y la producción sean no negativos) y por ende a una solución interior.

Un tercer problema se da cuando no hay un plan maximizador del beneficio y los beneficios pueden llegar a ser infinitos. Este es el caso mencionado anteriormente cuando el conjunto de producción presenta rendimientos no decrecientes a escala. Para ilustrarlo tomemos el caso de una empresa con un insumo y un producto cuya tecnología presenta rendimientos constantes a escala

$\pi = 0$	$\pi = \infty$
$\pi = px - wx = (p - w)x$	
si $p < w$ y $x > 0$	si $p > w$ y $x > 0$
$\pi < 0 \Rightarrow \pi = 0$	π cada vez mayores

El cuarto problema y relacionado con el anterior, se da cuando el plan de producción maximizador del beneficio no es único. Si (y, x) genera un beneficio máximo de cero con una tecnología de rendimientos constantes a escala, el plan (ty, tx) también generará el beneficio nulo.

A continuación presentaremos las propiedades de la función de demanda de factores, la función de oferta y la función de beneficios.

Proposition 85 *Propiedades de la función de beneficios $\pi(p, w)$ ⁴*

1. $\pi()$ es no decreciente en p
2. $\pi()$ es no creciente en w
3. $\pi()$ es homogénea de grado 1 en (p, w)
4. $\pi()$ es convexa
5. Lema de Hotelling.

- $\frac{\partial \pi(p, w)}{\partial p} = y(p, w)$
- $\frac{\partial \pi(p, w)}{\partial w_i} = -x_i^*(p, w)$

Proposition 86 *Propiedades de la función de oferta $y(p, w)$ y de la función de demanda de factores $x^*(p, w)$*

⁴Estas propiedades se cumplen independientemente de las propiedades del conjunto de producción.

1. Homogéneas de grado 0 en (p, w)

$$2. \frac{\partial y(p, w)}{\partial p} \geq 0$$

$$\frac{\partial x_i^*(p, w)}{\partial w_i} \leq 0$$

$$3. \frac{\partial x_i^*(p, w)}{\partial w_i} = \frac{\partial x_i^*(p, w)}{\partial w_i}$$

$$\frac{\partial x_i^*(p, w)}{\partial p} = \frac{\partial y(p, w)}{\partial w_i}$$

9.1 El principio de Le Chatelier

En esta sección examinaremos la respuesta a corto plazo de la conducta de oferta de la empresa en comparación con su respuesta a largo plazo. Intuitivamente la empresa debe responder más a una variación del precio de largo plazo ya que tiene más factores que ajustar a largo plazo que a corto plazo. Esto puede demostrarse.

Supongamos que hay un solo producto y que los precios de los factores son fijos. Sea $\pi_C(p, z)$ la función de beneficios a corto plazo, donde z es un factor fijo a corto plazo. Sea $z(p)$ la demanda de este factor maximizadora del beneficio a largo plazo; la función de beneficios a largo plazo vendrá dada por $\pi_L(p) = \pi_C(p, z)$. Por último, sea p^* el precio de un determinado producto y $z^* = z(p^*)$ la demanda óptima a largo plazo del factor z al precio p^* .

Los beneficios a largo plazo siempre son al menos tan elevados como los beneficios a corto plazo, ya que el conjunto de factores que pueden ajustarse a largo plazo contiene al subconjunto de factores que pueden ajustarse a corto plazo. Por lo tanto:

$$g(p) = \pi_L(p) + \pi_C(p, z^*) = \pi_C(p, z(p)) + \pi_C(p, z^*) \geq 0.$$

Si el precio es p^* el valor de la función será cero y será el mínimo. Como sabemos que se puede alcanzar un mínimo, la segunda derivada de dicha función debe ser positiva, es decir:

$$\frac{\partial^2 \pi_L(p^*)}{\partial p^2} - \frac{\partial^2 \pi_C(p^*, z^*)}{\partial p^2} \geq 0$$

Aplicando el lema de Hotelling, tenemos que

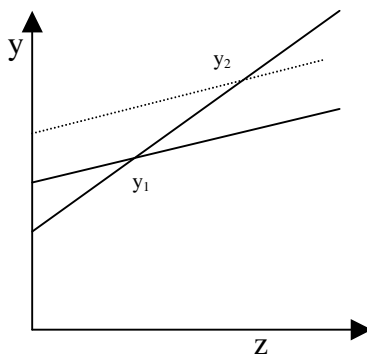
$$\frac{\partial y(p)}{\partial p} - \frac{\partial y(p^*, z^*)}{\partial p} \geq 0$$

lo que indica que la variación en el producto en el largo plazo es mayor o igual a la variación en el corto plazo.

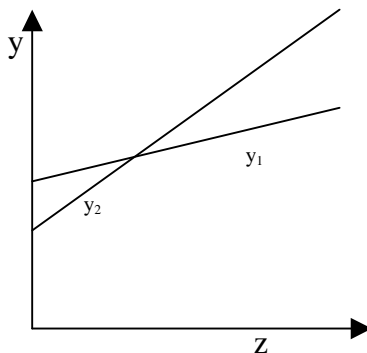
9.2 Axioma débil de la maximización de beneficio

Suponga que tenemos dos observaciones, una en el periodo t , (p^t, y^t) , y otra en el periodo s , (p^s, y^s) . Si la empresa escogió estos planes de producción a esos precios debió ser porque no existía ningún otro que le arrojará mayores beneficios. Diremos que la empresa cumple el axioma débil de la maximización de beneficios (ADMB) si $p^t y^t \geq p^t y^s$ y $p^s y^s \geq p^s y^t$. Estas dos condiciones se pueden expresar como $p^t(y^t - y^s) \geq 0$ y $-p^s(y^t - y^s) \geq 0$. Sumando las dos desigualdades tendremos que $(p^t - p^s)(y^t - y^s) \geq 0$, o de la misma forma, $\Delta p \cdot \Delta y \geq 0$. Esto puede interpretarse como la ley de la oferta expresada en términos no diferenciables: si existe un aumento de los precios la empresa aumentará su producción.

La bondad de este análisis es que se deriva directamente de la definición de maximización del beneficio sin necesidad de suponer algo sobre las restricciones tecnológicas. En el Figura 9.2 estas observaciones violan el ADMB ya que $p_1 y_2 > p_1 y_1$; por su parte, el Figura 9.2 muestra dos observaciones donde sí se cumple el ADMB.



Violación del ADMB

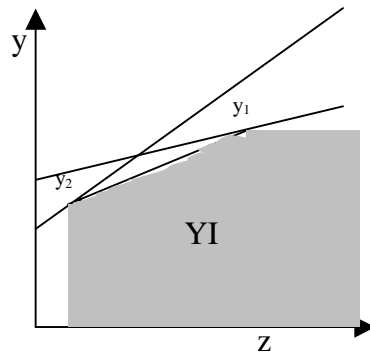


Cumplimiento del ADMB

La pregunta natural que surge del ADMB es si podemos construir una tecnología a partir de las observaciones. Al igual que en la teoría del consumidor, la operación de construir una tecnología compatible con las elecciones observadas se denomina recuperabilidad. Utilizando esta aproximación podemos recuperar la función de producción que me generaba dichos planes de producción óptimos. De hecho, siempre es posible hallar un conjunto de producción que sea cerrado y convexo.

Con el fin de hallar el conjunto de producción construiremos una frontera interior y una exterior que delimite nuestro verdadero conjunto de producción. Supongamos que el verdadero conjunto de producción cumple libre disposición y es convexo. La frontera interior es el conjunto monótono convexo menor que contiene a las observaciones, lo llamaremos YI . Cualquier punto sobre la frontera de este conjunto es una elección maximizadora de beneficios. Es decir, $p^t y^t \geq p^t y$ para cualquier y que pertenece a YI y y^t que pertenece a la frontera de YI .

Para probar esto suponga que no es cierto. En ese caso existe alguna observación t tal que $p^t y^t < p^t y$ en el caso de algún y que pertenece a YI . Sin embargo el Figura 9.2 muestra que en ese caso debe existir alguna observación s tal que $p^t y^t < p^t y^s$. Pero esta desigualdad viola el ADMB. Por lo tanto, el conjunto YI racionaliza la conducta observada en el sentido de que es una tecnología que podría haber generado esa conducta. Sin embargo, YI no deja de ser un subconjunto de cualquier tecnología convexa que genere la conducta observada, por eso es el conjunto convexo menor.



Frontera interior del conjunto de producción

Para hallar la frontera exterior primero definimos el conjunto de todas las producciones que generen mayores beneficios que alguna elección observada: $NOY = \{y : p^t y > p^t y^t \text{ en el caso de algún } t\}$. Si la empresa maximiza beneficios, esas combinaciones no pueden ser tecnológicamente viables, pues de lo contrario ya se habrían elegido. Así que la frontera exterior de Y es el complemento de este conjunto: $YE = \{y : p^t y \leq p^t y^t \text{ cualquiera que sea } t\}$.

$t\}$. Continuando con el anterior ejemplo, la frontera exterior será la región sombreada del Figura 9.1.

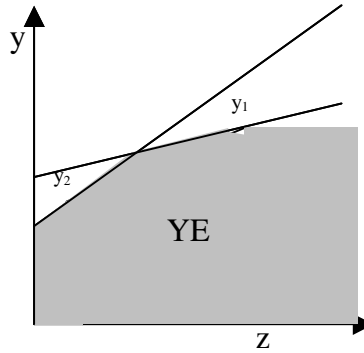


Figure 9.1: Frontera exterior del conjunto de producción

Para demostrar que YE racionaliza la conducta observada, debemos demostrar que los beneficios correspondientes son al menos iguales a los beneficios que se hubieran obtenido al elegir cualquier otro y que pertenezca a YE . Esto lo sabemos por la misma definición de YE . De esta forma, YE y YI constituyen la frontera exterior e interior que mejor acotan el verdadero conjunto de producción que generó los datos.

Chapter 10

Problema de la minimización del costo

Una implicación importante de escoger planes de producción siguiendo el algoritmo de maximización de beneficios es que no hay manera de producir las mismas cantidades de producto a un menor costo de los insumos. Por lo tanto la minimización de costos es una condición necesaria de la maximización de los beneficios.

Sin embargo, abordar el problema a través de la minimización de costos puede traer algunas ventajas. Primero, cuando una firma no es tomadora de precios, la función de beneficios óptima después de escoger los insumos óptimos ya no es útil, mientras la minimización de costos continua siendo válida. Segundo, cuando el conjunto de producción exhibe retornos no decrecientes a escala, la función objetivo y las cantidades óptimas se comportan de una mejor forma al minimizar costos que al maximizar beneficios.

Asumiendo que el conjunto de producción cumple con libre disposición y que existe un solo producto, el problema puede enunciarse de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} \underset{z \geq 0}{Min} & w \cdot z \\ \text{s.a} & f(z) \geq q \end{array}$$

De esta forma, el problema se resuelve eligiendo la cantidad de insumos óptimos. Estas cantidades se conocen como las *demandas condicionadas de factores* $z(w, q)$. El término condicionada se da porque las demandas de factores son condicionales al requerimiento de producción q . La *función de costos* $c(w, q)$ es el valor optimizado del problema y dependerá únicamente de los precios de los insumos y de la producción requerida.

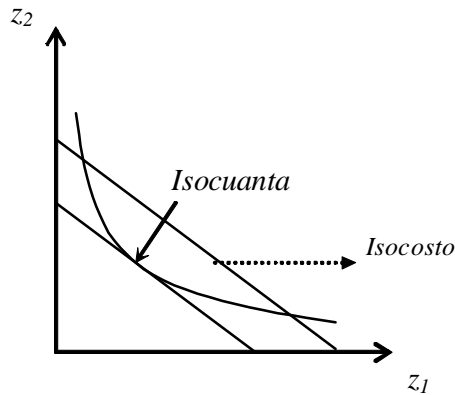
Si resolvemos el problema utilizando las condiciones de Kuhn Tucker, obtendremos que las condiciones óptimas son

$$w_l \geq \lambda \frac{\partial f(z^*)}{\partial z_l} \text{ y } [w_l - \lambda \frac{\partial f(z^*)}{\partial z_l}] z_l = 0$$

Lo que es equivalente a

$$TMST_{lk} = -w_l/w_k.$$

Esto se espera porque la maximización de beneficios implica que la combinación de insumos minimiza el costo al producir q . El multiplicador lagrangiano, que puede ser interpretado como el valor marginal de relajar la restricción, en este caso será igual al costo marginal de producir una unidad más de producto $\frac{\partial c(w,q)}{\partial q}$. La solución al problema se dibuja en la Figura 10 en el caso de dos insumos. El contorno superior de la isocuanta representa el conjunto de insumos que pueden producir al menos la cantidad q . La curva de isocosto me genera todas las combinaciones de insumo que me generan el mismo costo. La solución óptima debe ser donde son tangentes la isocuanta y la curva de isocosto.



El problema de minimización de costos

Como esta minimización de costos es análoga al dual en la teoría del consumidor, la función de costos hereda las anteriores propiedades, y presenta dos más relacionados a los rendimientos de la función de producción. Las demandas condicionadas también cumplen propiedades similares a las demandas hicksianas de la teoría del consumidor.

Proposition 87 Propiedades de la función de costos $c(w, q)$. Si Y es cerrado y cumple con libre disposición entonces

- $c(\cdot)$ es homogénea de grado 1 en w y no decreciente en q
- $c(\cdot)$ es una función cóncava de w
- Si los conjuntos $\{z \geq 0 : f(z) \geq q\}$ son convexos para todo q entonces $Y = \{(-z, q) : w \cdot z \geq c(w, q) \text{ para todo } w \gg 0\}$
- Lema de Shephard. $\nabla_w c(\bar{w}, q) = z(\bar{w}, q)$ es decir $\frac{\partial c(w, q)}{\partial w_i} = z_i(w, q)$

- Si $f(\cdot)$ es una función de producción homogénea de grado $\alpha > 0$, $c(w, q) = q^{1/\alpha}c(w, 1)$. En particular si $f(\cdot)$ es una función homogénea de grado 1 (retornos constantes a escala) entonces $c(\cdot)$ es homogénea de grado 1 en q . Si $f(\cdot)$ es una función cóncava entonces $c(\cdot)$ es una función convexa de q (Costos marginales son no decrecientes en q)
- $c(w, 0) = 0$

Proposition 88 *Propiedades de la función de demandas condicionadas* $z(w, q)$. Si Y es cerrado y cumple con libre disposición entonces

- $z(\cdot)$ es homogénea de grado 0 en w
- Si el conjunto $\{z \geq 0 : f(z) \geq q\}$ es convexo entonces $z(w, q)$ es un conjunto convexo. Si $\{z \geq 0 : f(z) \geq q\}$ es estrictamente convexo entonces $z(w, q)$ tiene un único valor.
- Se tiene que $D_w z(\bar{w}, q) = D_w^2 c(\bar{w}, q)$ es una matriz simétrica y semi-definida negativa con $D_w z(\bar{w}, q)\bar{w} = 0$. Es decir, $\partial z_1(w, q)/\partial w_l \leq 0$ y $\partial z_1(w, q)/\partial w_k = \partial z_k(w, q)/\partial w_l$. Esta matriz de sustitución se representa como

$$\sigma^*(w, q) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1(w, q)}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial z_1(w, q)}{\partial w_{L-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_{L-1}(w, q)}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial z_{L-1}(w, q)}{\partial w_{L-1}} \end{pmatrix}$$

- Si $f(\cdot)$ es una función de producción es homogénea de grado $\alpha > 0$, $z(w, q) = q^{1/\alpha}z(w, 1)$. En particular, si $f(\cdot)$ es una función homogénea de grado 1 (retornos constantes a escala) entonces $z(\cdot)$ es homogénea de grado 1 en q

La función de costos puede ser bastante útil cuando el conjunto de producción presenta rendimientos constantes a escala. En este caso, $y(\cdot)$ no tiene un solo valor, haciendo que el Lema de Hotelling sea inaplicable. Mientras que la demanda condicionada de factores sí tendrá un solo valor, luego el Lema de Shephard se hace bastante útil.

Sin embargo, la función de costos no contiene más información que la función de beneficios. Dada esta relativa dualidad, podemos recuperar el conjunto de producción de cada función. Además, utilizando los costos puede restablecerse el problema de la firma de determinar sus niveles de producción para maximizar beneficios.

Chapter 11

Maximización de beneficios a partir de la producción

Existen dos casos para resolver el problema de maximización de beneficios a través de la elección de la producción. El primero de ellos es suponer que existe competencia perfecta donde se asume que cada producto y cada insumo tiene un precio dado por el mercado (supuesto de los tomadores de precios). En un segundo enfoque se supone que la empresa tiene influencia sobre el precio a través del nivel de producción, este caso es más común en competencia imperfecta.

11.1 Competencia Perfecta

En nuestro caso se asumirá que las firmas sólo producen un bien (y) cuyo precio es p y demandan L insumos (x_l) cuyo precio está dado por w_l donde $l = 1, \dots, L$. Se supone que los precios no pueden ser menores o iguales a 0 y que esos precios son independientes de los planes de producción de las firmas. Así, el problema de maximización de beneficios puede formularse como

$$\underset{q \geq 0}{Max} \quad pq - c(w, q)$$

Donde $c(w, q)$ es la función de costos mínimos. Las condiciones de primer orden de este problema para encontrar la producción óptima que maximiza los beneficios será

$$p - \frac{\partial c(w, q^*)}{\partial q} \leq 0 \text{ con igualdad si } q^* > 0$$

Es decir, el precio debe ser igual al costo marginal.

11.2 Competencia Imperfecta

En este caso se supone que el nivel de producción afecta el precio de mercado y que las empresas tienen en cuenta esto. Así, la empresa elegirá un nivel de producto q para ser vendido en el mercado a un precio p . Ese precio estará determinado entonces por la función de demanda $p = p(q)$. Según esto, si la empresa vende una cantidad q a los precios $p(q)$ tendrá unos ingresos totales ($IT(q)$) de

$$IT(q) = p(q) \cdot q$$

De igual forma, para poder producir una cantidad q la empresa tuvo que incurrir en unos costos totales que determinaremos como $CT(q)$, esta función es la obtenida después del problema de minimización de costos. El problema de maximización de los beneficios puede formularse como

$$\underset{q}{Max} \quad \pi(q) = IT(q) - CT(q)$$

c.p.o:

$$\frac{d\pi}{dq} = \pi'(q) = \frac{dIT}{dq} - \frac{dCT}{dq} = 0$$

como condición de segundo orden se necesita que $\pi'' < 0$ para garantizar que se está hayando un máximo.

Note que la condición de maximización es entonces

$$IMg = CMg$$

Gráficamente el problema puede representarse por la figura 11.1

Note que el ingreso marginal está determinado por

$$IMg(q) = \frac{dIT}{dq} = p + q \cdot \frac{dp}{dq} \quad (11.1)$$

Note que la ecuación 11.1 muestra que si el precio no cambia cuando cambia el producto de la firma el IMg será simplemente igual al precio, este es el caso de competencia perfecta. Esta misma expresión puede dejarse en términos de la elasticidad precio de la demanda como se sigue a continuación. De la ecuación 11.1 se tendrá entonces que

$$\begin{aligned} IMg(q) &= p \left(1 + \frac{q}{p} \cdot \frac{dp}{dq} \right) \\ &= p \left(1 + \frac{1}{El_p^q} \right) \end{aligned} \quad (11.2)$$

La expresión dada por la ecuación 11.2 muestra que si la curva de demanda a la que se enfrenta la empresa tiene pendiente negativa $El_p^q < 0$ el ingreso marginal es menor al precio. Si la demanda es elástica ($El_p^q < -1$) el ingreso

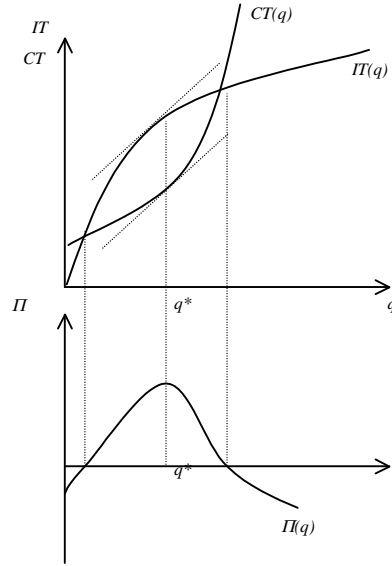


Figure 11.1: Maximización de beneficios en competencia imperfecta

marginal es positivo, la venta de una unidad adicional no afectará mucho el precio y por lo tanto generará más ingresos. Si la demanda es infinitamente elástica ($El_p^q = -\infty$) el ingreso marginal es igual al precio (competencia perfecta). Si la demanda es inelástica ($El_p^q > -1$) el ingreso marginal es negativo.

Si igualamos la ecuación 11.2 al CMg se tendrá

$$\begin{aligned} CMg &= p \left(1 + \frac{1}{El_p^q} \right) \\ \frac{p - CMg}{p} &= -\frac{1}{El_p^q} \end{aligned} \quad (11.3)$$

La interpretación de la ecuación 11.3 es bastante interesante. Cuando la empresa es precio aceptante $El_p^q = -\infty$ y por tanto $p = CMg = IMg$. Además, la ecuación 11.3 sólo tiene sentido cuando la demanda está en su tramo elástico ($El_p^q < -1$) ya que si $El_p^q > -1$ esta ecuación implicaría que $CMg < 0$ lo que es imposible. Esto implica que las empresas maximizadoras de los beneficios decidirán producir en los puntos donde las curvas de demanda sean elásticas.

Example 89 Suponga el caso donde la demanda es una función lineal del tipo $q = 100 - 10p$ ($p = -\frac{q}{10} + 10$). Allí tendríamos que el ingreso total es $IT(q) = p * q = -\frac{q^2}{10} + 11q$ y por tanto el ingreso marginal sería $IM(q) = -2\frac{q}{10} + 11$. Si los costos totales de la empresa son $CT = q^2$, entonces sus costos marginales son $CMg = 2q$. Igualando IM y CMg obtendremos que la cantidad óptima a producir por una empresa es 5 y sus beneficios máximos serán de 27.5.

Chapter 12

Dualidad Teoría del Productor

Recordemos que la Función de Beneficios está dada por

$$\begin{aligned}\Pi &= p \cdot f(x) - CT \\ &= p \cdot f(x) - \sum_{i=1}^N w_i \cdot x_i\end{aligned}$$

y las condiciones de primer orden por:

$$p \cdot PMg x_i = w_i$$

Si se relacionan las C.P.O para cada par de insumos se obtiene:

$$\frac{PMg x_i}{PMg x_j} = \frac{w_i}{w_j}$$

la cual indica que en el óptimo la *relación técnica de sustitución* entre dos factores debe ser igual a la relación entre sus precios.

Al solucionar estas ecuaciones se obtienen las *demandas no condicionadas de factores* $x_i^*(p, w)$. Si estas se reemplazan en la función de producción, se obtiene la función de oferta de la firma $y^*(p, w)$.

Al reemplazar las soluciones en la función objetivo, se llega a la función de beneficios máximos $\Pi^*(p, w)$ sobre la que se aplica el *lema de Hotelling* obteniendo nuevamente las demandas y la función de oferta.

Por su parte, la minimización de costos consiste en minimizar $\sum_{i=1}^N w_i \cdot x_i$ sujeta a $f(x) = y$, donde y es un nivel de producción determinado. Para la solución se plantea el langrangiano:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N w_i x_i - \lambda(f(x) - y)$$

cuyas condiciones de primer orden son:

$$\lambda.PMg x_i = w_i$$

y de las que se llega a:

$$\frac{PMg x_i}{PMg x_j} = \frac{w_i}{w_j}$$

Como puede notarse, esta es la misma condición que maximiza los beneficios, lo que implica que las dos soluciones son equivalentes. A partir de estas relaciones se pueden determinar las demandas condicionadas de factores $x_i^C(w, y)$, que al ser reemplazadas en la función objetivo permiten encontrar la función de costo mínimo $C(w, y)$.

De la función $C(w, y)$ pueden hallarse la función de oferta de la empresa y recuperar las demandas condicionadas por medio del *lema de Shephard*. Para hallar la función de oferta, debe reformularse la función de beneficios en términos de los precios y de la cantidad producida:

$$\Pi^* = p.y - C^*(w, y)$$

La condición que maximiza esta función es:

$$p = \frac{\partial C^*(w, y)}{\partial y} = Cmg$$

y a partir de esta puede expresarse la cantidad a producir y en función de los precios de los insumos y del producto. Esta oferta debe ser igual a la que se determinó en el primer problema reemplazando las demandas no condicionadas de factores en la función de producción.

Si se reemplaza esta función de oferta en las *demandas condicionadas de factores*, se obtienen las *funciones de demanda no condicionadas* halladas inicialmente a partir del problema de maximización de beneficios.

Al revisar los dos problemas básicos de la teoría del productor se encuentra que las condiciones que los solucionan son equivalentes, y por lo tanto las soluciones deben ser las mismas. Sin embargo, debe notarse que bajo ciertas condiciones (ej, rendimientos no decrecientes a escala), alguno de los problemas puede no generar solución, y por tanto no se puede demostrar claramente que se cumpla la dualidad.

12.1 Recuperación de la Función de Producción.

Para definir la dualidad en el productor se parte de que la función de costo mínimo $C(w, y)$ contiene la misma información que la función de producción

$y = f(x)$, así que a partir de la función de costos mínimos se puede hallar una tecnología que haya generado dicha función de costos.

Si la tecnología original es convexa y monótona, la función de costos correspondiente puede utilizarse para reconstruir totalmente la tecnología original. Si la tecnología original no es convexa o monótona, se construye una versión convexificada y monotonizada del conjunto original, de tal forma que la tecnología construida tendrá la misma función de costos que la original.

Para que se pueda recuperar la tecnología es necesario que la función de costos satisfaga las siguientes propiedades:

- Homogeneidad de grado 1 en w .
- $C(w, y) \geq 0$ si $w \geq 0$ y $y \geq 0$
- No decreciente en w .
- Cóncava en w
- Diferenciable

Y también necesitamos que las demandas condicionadas de factores cumplan:

- Homogénea de grado cero en w .
- Lema de Shephard.
- $z_i \geq 0$ para todo i .
- $\frac{\partial z_i}{\partial w_1} = \frac{\partial z_i}{\partial w_i}$
- $\frac{\partial z_i}{\partial w_1} \leq 0$

Matemáticamente, para hallar la función de producción a partir de la función de costos, se puede seguir este proceso:

1. Verificar que se cumplen las propiedades de la función de costos, en especial la homogeneidad de grado 1 en w .
2. Aplicar el *Lema de Shephard* para hallar las *demandas condicionadas de factores*
3. A partir de las n funciones de demandas de factores, se eliminan los términos w_1, \dots, w_n . En el caso de dos factores, la forma más sencilla es despejar la relación w_1/w_2 en las dos demandas, e igualarlas. De esta forma, se obtiene una sola ecuación en términos de x_1 , x_2 , y y , que es la misma función de producción.

12.1.1 Enfoque gráfico de la Dualidad:

Describir la tecnología o función de producción $y = f(x)$ es equivalente a describir el conjunto de curvas de isocuantas o a la familia de conjuntos de requerimientos de factores.¹ Escoja un vector de precios $w^1 \gg 0$, y grafique la curva de isocosto correspondiente. El conjunto de requerimiento de factores debe intersectar el conjunto de combinaciones más "caras" que la isocosto definida; al repetir varias veces este proceso, puede decirse que la intersección entre todas las áreas por encima de la isocosto equivale al conjunto de requerimiento de factores (figura 12.1).

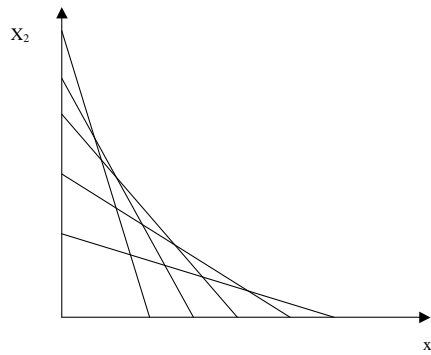


Figure 12.1: Recuperación de la función de producción.

¹ El conjunto de requerimiento de factores es el conjunto de todas las posibles combinaciones de factores que producen *al menos* un nivel de producción igual a y ; es decir, incluye la isocuenta de y y todas las posibles canastas de factores que permitan producir una cantidad mayor.

Chapter 13

La Geometría del Costo y de la Oferta en el caso de un solo producto

13.1 Diferencia entre el Corto y Largo Plazo

En esta sección continuaremos nuestro análisis de la relación entre la tecnología de la firma, su función de costos, y el comportamiento de su oferta para el caso de un solo producto. Denotaremos por q las cantidades, w el precio de los factores, $C(q)$ la función de costos, $Cme = C(q)/q$ el costo medio, y $CMg = C'(q) = dC(q)/dq$ el costo marginal. El costo marginal es el costo adicional en el que debe incurrir la empresa para producir una unidad adicional. El costo medio es el costo por cada unidad producida.

13.1.1 Largo Plazo

Para encontrar la función de oferta de una empresa se deben cumplir tres condiciones. La primera es la que se hallaba después de maximizar los beneficios. Recordemos que la función de beneficios está dada por $\pi = p \cdot q - C(q)$. La primera derivada es $\frac{\partial \pi}{\partial q} = p - C'(q)$, la condición de primer orden consiste en igualar a cero la primera derivada, esto es, que los niveles de producto deben satisfacer la condición de primer orden $p = C'(q)$.

La segunda condición se encuentra con la condición de segundo orden de la función de beneficios. Como la idea es maximizar esta función, la segunda derivada debe ser negativa para asegurar que es una función cóncava en ese punto y se está hallando un máximo. Por lo tanto, tendremos que $\frac{\partial^2 \pi}{\partial q^2} = -\frac{\partial^2 C}{\partial q^2} \leq 0$, que es equivalente a decir que $\frac{\partial^2 C}{\partial q^2} \geq 0$. En otras palabras, la condición de segundo orden implica que se están maximizando beneficios solamente cuando la función de costos es convexa. Como el CMg es la primera derivada de los

costos totales, la condición implica que se maximizará beneficio cuando el costo marginal sea no decreciente. Esta condición se cumple siempre que el conjunto de producción es convexo (función de producción cóncava).

La tercera condición se halla tomando en cuenta los costos medios. Note que la función de beneficios puede reexpresarse como $\pi = p \cdot q - Cme \cdot q = q(p - Cme)$. Note que el costo medio y marginal son iguales cuando el nivel de producción arroja el costo medio mínimo.¹ Cuando $p > Cme()$ la firma maximiza su beneficio produciendo el nivel que satisfaga $p = CT(q) > Cme(q)$. Si $p = Cme$, estaremos en la situación donde los beneficios son nulos, allí el nivel de producción que maximiza los beneficios será $\{0, q\}$. Por otro lado, cuando $p < Cme()$, cualquier nivel de producción lleva a beneficios negativos y la oferta óptima de la firma será cero.

En las siguientes figuras se dan dos ejemplos de conjuntos de producción convexos. Suponemos que solamente hay un insumo y su precio lo normalizamos a uno. En la primera figura (figura 13.1.1) se observa que la función de costos se obtiene del conjunto de producción rotándolo 90 grados. La determinación del costo medio y del costo marginal se muestran también en esa gráfica. Note que el costo marginal dibuja las pendientes de la función de costos en cada nivel de producción. El costo medio se obtiene hallando la pendiente de la relación entre la función de costos y el nivel de producción. La curva de oferta será la curva reteñida, y es donde se intersecan $Cme \leq CMg$.

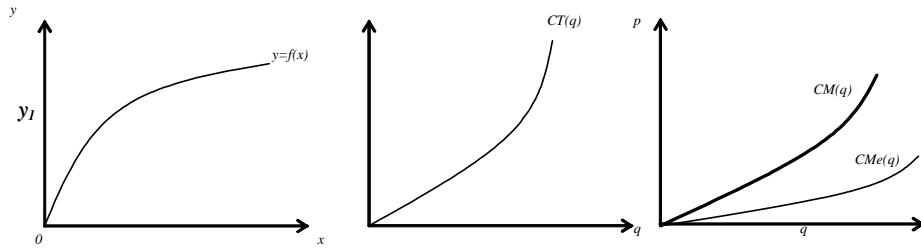


Figura 1. Rendimientos decrecientes

La figura 13.1.1 hace lo mismo pero para rendimientos constantes a escala. Debido a que las tecnologías en estos dos ejemplos son convexas, la oferta coincide exactamente con las combinaciones que satisfacen la condición de primer orden.

¹Note que cuando el CMe es mínimos es igual al CMg

$$\begin{aligned} \frac{\partial CMe}{\partial y} &= 0 \rightarrow \frac{\frac{\partial CT}{\partial y} y - CT}{y^2} = 0 \\ &\rightarrow \frac{\partial CT}{\partial y} = \frac{CT}{y} \end{aligned}$$

De igual manera cuando $CMg \geq CMe$ el CMe es creciente. Cuando $CMg \leq CMe$ el CMe es decreciente

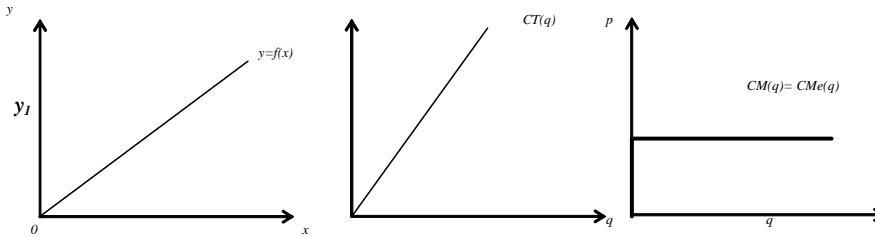


Figura 2. Rendimientos constantes

Si la tecnología no es convexa, quizás por la presencia de alguna indivisibilidad subyacente, entonces el cumplimiento de la condición de primer orden no seguirá implicando la maximización de beneficios. En este caso la oferta será un subconjunto del conjunto de combinaciones que satisfacen la condición. En otras palabras, la oferta se dará a partir del q donde la función de producción comience a ser cóncava.

La figura 13.1.1 dibuja la situación de una tecnología no convexa. Al principio existe un segmento con rendimientos crecientes donde el costo medio decrece (note que el costo marginal no decrece en todo el segmento), y luego una región con rendimientos decrecientes donde el costo medio crece. Los niveles de producción correspondientes al costo medio mínimo se llama la escala eficiente, que se denota por \bar{q} .

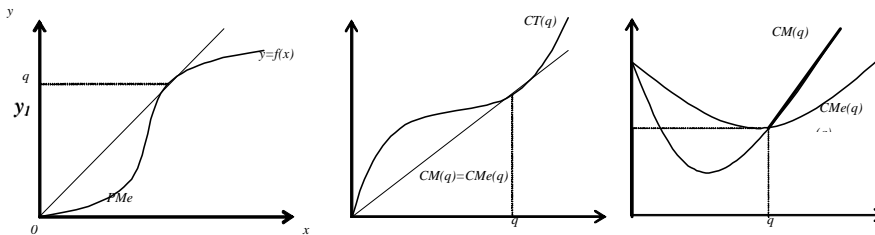


Figura 3. Función generalizada

Una fuente importante de no convexidades son los costos fijos (de instalación). Estos pueden ser o no ser hundidos (Por qué?). Las siguientes figuras muestran el caso con dos **costos fijos de instalación** que no son hundidos (por lo tanto la inacción es posible). En estas figuras, consideramos el caso en donde la firma incurre en el costo fijo de K si y sólo si produce una cantidad positiva de producto de lo contrario tendrá costos convexos. En particular, el costo total es de la forma $c(0) = 0$ y $C(q) = CV(q) + rK$, donde la función de costos variables será convexa. En el primer caso (figura 13.1.1) se dibuja cuando la función de costos es estrictamente convexa y el segundo caso (figura 13.1.1) cuando es lineal.

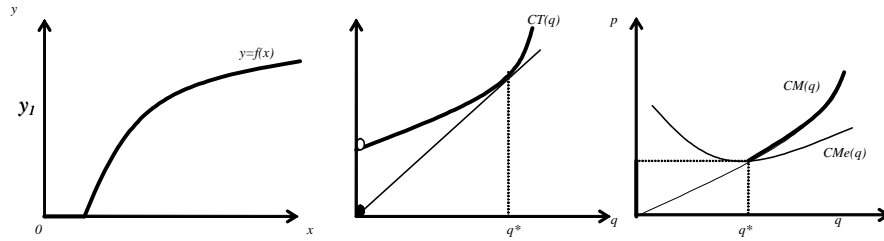


Figura 4. Costos fijos no hundidos. RDE

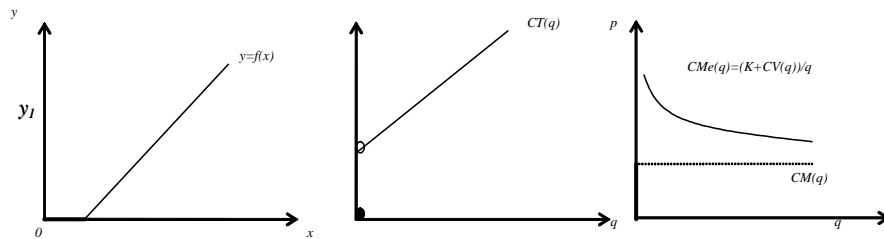


Figura 5. Costos fijos no hundidos. RKE

En las dos ilustraciones, la firma producirá una cantidad positiva sólo si sus ingresos son suficientes para cubrir no solamente sus costos variables sino sus costos fijos. En el segundo caso, cuando $p \geq \bar{p}$, la oferta será infinita, y $q = 0$ será óptimo cuando $p \leq \bar{p}$.

En la figura 13.1.1, se supone existen costos hundidos, de tal forma que $C(0) > 0$. En particular, ahora tendremos $C(q) = CV(q) + rK$ para todo $q \geq 0$; entonces, la firma debe pagar rK independientemente del nivel de producción.

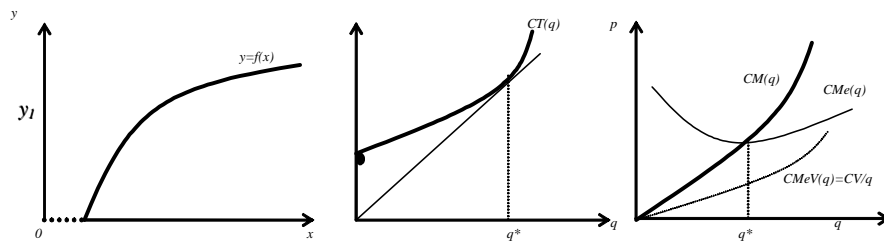


Figura 6. Costos hundidos. RDE

Aunque la inacción no es posible aquí, la función de costos es convexa, y estamos de nuevo en el caso en donde la condición de primer orden es suficiente. Como la firma debe pagar rK así no produzca, la empresa no cerrará simplemente porque los beneficios son negativos. Note que como la función de

costos variables es convexa, la firma cubre sus costos variables cuando cumple la condición de primer orden $p = C'(q) = CV'(q)$. Note que su función de oferta será la misma que si no tuviera que pagar los costos hundidos.

13.1.2 Corto Plazo

Como se dijo antes, una fuente de costos hundidos, al menos en el corto plazo, es que la cantidad de algunos insumos no se pueden cambiar debido a decisiones anteriores son irrevocables. Esto puede llevar a pensar que las funciones de costos son distintas en el corto y en el largo plazo. Consideremos el caso de dos insumos y un producto.

En el LP hay flexibilidad $y = f(k, l)$ en el CP las empresas no pueden afectar el consumo de todos sus factores y por tanto $y = f(\bar{k}, l)$. La función de costos totales a LP será

$$CT = wl(y, w, r) + rk(y, w, r).$$

La función de costos totales de CP serán

$$\begin{aligned} CTC &= \underbrace{wl(y, w, r)}_{CVC} + \underbrace{r\bar{k}}_{CFC} \\ &\quad \text{Costos Variables} \quad \text{Costos Fijos} \\ &= CVC(y) + CFC \end{aligned}$$

al igual que en el LP se pueden obtener el CMg ($\frac{\partial CT}{\partial y} = CMg$) y el CMe ($\frac{CT}{y} = CMe$). En el CP se tendrá entonces que

$$\begin{aligned} CMgC &= \frac{\partial CTC}{\partial y} = \frac{\partial CVC}{\partial y} \\ CMeC &= \underbrace{\frac{CVC}{y}}_{CVMeC} + \underbrace{\frac{CFC}{y}}_{CFMeC} \end{aligned}$$

de forma general las gráficas de costos asociadas a la función de producción serán como se muestran en la figura 13.1.2 (la función de oferta estará definida por los segmentos reteñidos). Para entender porque la empresa estará dispuesta a producir en los tramos reteñidos haremos el caso del CP, en cuyo caso tendremos unos costos fijos, por tanto las gráficas de Costos serían las siguientes. Note que el CVMeC es mínimo cuando es igual al CMgC

$$\begin{aligned} CVMeC &= CMeC - \frac{CFC}{y} \\ \frac{\partial CVMeC}{\partial y} &= \frac{\partial CMeC}{\partial y} + \frac{CFC}{y^2} = 0 \\ &= \frac{\partial CTC}{\partial y} \frac{1}{y^3} - \frac{CTC}{y^2} + \frac{CFC}{y^2} = 0 \\ \frac{\partial CT}{\partial y} &= \frac{CVC}{y} \end{aligned}$$

Ya hemos dicho que cuando el $p = CMg$ la firma está describiendo su función de oferta y note que dado

$$\begin{aligned} & \underset{y}{Max} py - c(w, y) \\ & c.p.o : p = CMg \\ & \pi = py - CTC = py - CVC - CFC \end{aligned}$$

entonces

- ¿Desde dónde estará dispuesta una firma a producir?

Desde que logre recuperar por lo menos parte de sus CFC de esta forma
 $\pi \geq -CFC$

$$\begin{aligned} \pi & \geq -CFC \\ py - CVC - CFC & \geq -CFC \\ py & \geq CVC \\ p & \geq \frac{CVC}{y} \rightarrow p \geq CVMeC \text{ (punto A)} \end{aligned}$$

- ¿Cuándo sus $\pi = 0$?

$$\begin{aligned} \pi & = 0 \\ py - CVC - CFC & = 0 \\ p & = \frac{CVC + CFC}{y} \rightarrow p = CMeC \text{ (punto B)} \end{aligned}$$

de esta forma, cuando $p \leq CVMeC$ la firma no estará dispuesta a entrar al mercado ya que ni siquiera recuperaría parte de sus costos fijos. Conociendo que la función de oferta está dada por el CMg la curva de oferta se expresa en la gráfica por los segmentos reteñidos.

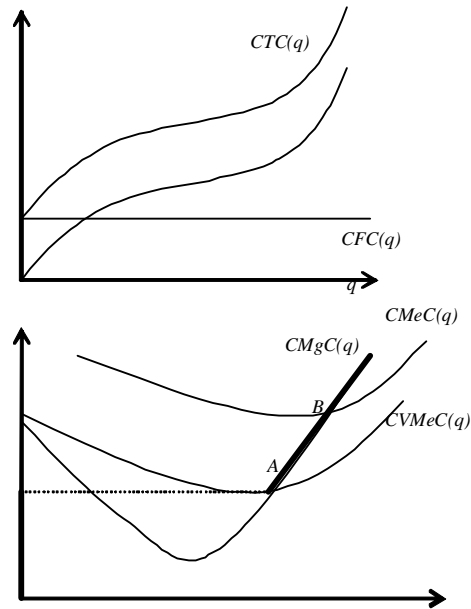


Figura 7. Costos en el CP asociados a la función de producción generalizada

13.2 Relación entre el corto y el largo plazo

El comportamiento que describimos anteriormente nos da la información para conocer la forma de las curvas de costos para el corto plazo, a continuación se relacionará con el largo plazo.

Inicialmente note que en el CP $f(\bar{k}, l)$, por lo tanto está restringida a un conjunto \bar{k} y únicamente puede variar l . Así, en el CP deben elegirse combinaciones "no óptimas" de los factores (véase la figura 13.2). Note que a diferentes niveles de producción, la firma no siempre podrá igualar la $TMST$ con la relación de los precios de los factores. Tal como es el caso con CT_2 (en CT_1 sucede que la decisión óptima en el corto plazo también lo es en el LP)

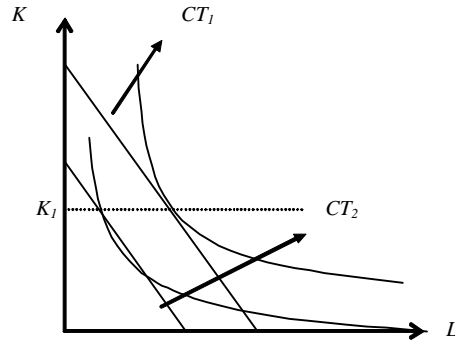


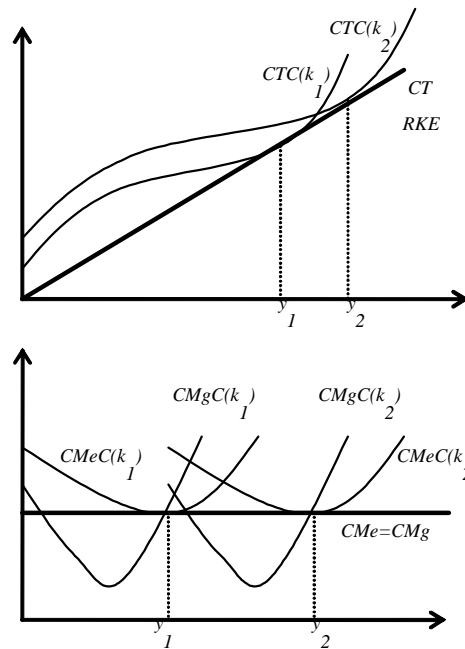
Figura 8. Isocuanta. Relación CP y LP con K fijo

Ya que en el largo plazo el productor tiene más flexibilidad en el manejo de los factores, es lógico esperar que los costos en el LP sean menores que los costos en el CP para cualquier nivel de producción, excepto para aquel en que la demanda de factor fijo es igual a la que minimiza el costo de LP.

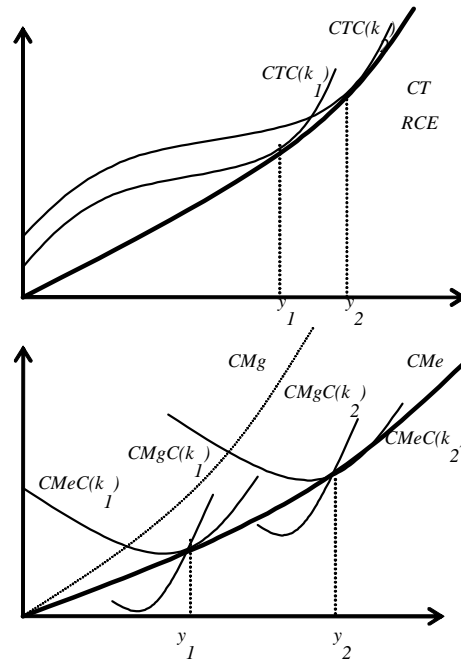
El $CMeLP$ es el límite inferior de todas las curvas de $CMeCP$ o su "envolvente". Las diferentes curvas de $CMeLP$ se hallan variando el factor que se considere fijo. Por lo tanto en el LP también debe cumplirse que $\frac{\partial CT}{\partial K} = 0$.

Note que si en el CP se pudiera elegir entre k_1, k_2 las curvas serían:

1. Si la $f()$ tiene rendimientos constantes a escala en el LP: Se obtendrá lo que se describe en el gráfico 1. Las líneas en negrita representan las curvas en el LP y las más claras son las correspondientes al CP. De esta manera se está representando la función de costo de CP para dos niveles de k fijos (k_1, k_2) y la de LP en la parte superior del gráfico, y en la parte inferior sus respectivas curvas de Costos Marginales y Costos Medios. En ambos casos la gráfica del LP "envuelve" a las curvas de corto plazo en sus puntos óptimos.

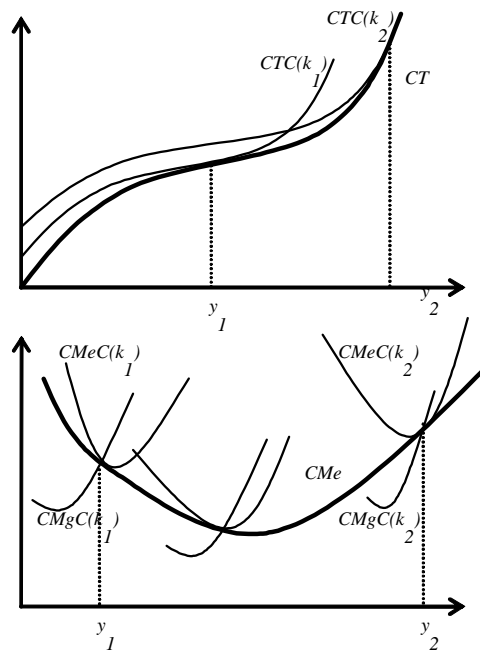


2. Si la $f()$ tiene rendimientos decrecientes a escala en el LP (véase 2): de esta forma se tiene que la Función de Costo de LP será creciente en la producción y por tanto la curva de costo marginal siempre estará por arriba de la curva de costo medio.



3. ¿cómo sería entonces si la función presenta rendimientos crecientes a escala?

4. Si la $f()$ tiene la forma generalizada esta gráfica será como se muestra en la figura 4



Part III

Equilibrio Parcial

Chapter 14

Equilibrio Competitivo

(Resumen de Cap. 16 Varian, Cap. 16 Nicholson)

Hasta ahora se ha supuesto que los empresas y consumidores maximizan sus intereses tomando en cuenta que las características del mercado eran ajenas a sus decisiones. Ahora nos concentraremos en el modo en que el entorno económico y en general el mercado, dependen de las conductas de las empresas y los individuos.

Inicialmente, cabe resaltar que el análisis que haremos es un análisis que se refiere únicamente a un mercado y por tanto sólo toma las repercusiones sobre este mercado, es por esta razón que se denomina un análisis de equilibrio parcial. En cursos más avanzados verán *equilibrio general* que es un análisis que compete a varios mercados y los precios se determinan según la interrelación de estos.

En equilibrio se tomará que tanto oferentes como demandantes son precio aceptantes. Hemos observado la teoría del consumidor de la cual se desprende la demanda individual por un bien y posteriormente la demanda agregada o la demanda del mercado. Por su parte estudiamos la teoría del productor, cuya variable de decisión era la cantidad de producto que estaría dispuesto a ofrecer en el mercado a unos precios dados. Seguido a esto se analizó cómo se calcularía la oferta agregada o la oferta de la industria. Al unir estos dos componentes se tendrá el equilibrio del mercado.

El equilibrio de mercado dará el precio y las cantidades óptimas, de tal forma que no existan excesos de demanda ni de oferta. Si el precio es más bajo que el de equilibrio, habría más demanda que oferta del bien, por lo que haría que los oferentes aumentarían el precio para ofrecer más. Si fuera superior, no venderían todo su producto, por lo que bajarían su precio. Para saber cuánto consume cada persona reemplazamos en su función de demanda individual y para las empresas en su función de oferta individual. De esta forma sabremos las cantidades a consumir y producir, de cada agente del mercado.

La inversa de la función de oferta de la industria puede verse como la función de costos marginales de la industria, indica el precio mínimo al que la industria está dispuesta a ofrecer una cantidad dada de producción. La función inversa de la demanda agregada puede verse como el beneficio social marginal del bien

ya que se supone que la cantidad agregada está distribuida eficientemente entre todos los consumidores. Dadas estas interpretaciones podemos ver el equilibrio competitivo como el nivel agregado de producto donde el beneficio social marginal del bien es exactamente igual a su costo marginal.

Definition 90 *El precio de equilibrio es aquel con el que la cantidad demandada es igual a la ofrecida. Ni los compradores ni los oferentes tienen incentivos para alterar sus decisiones económicas. Donde I es el ingreso agregado de los consumidores*

$$Q_D(p_1, p_2, I) = Q_S(p_1, w, r)$$

$$Q_D(p_1) = Q_S(p_1)$$

Suponga que tenemos una oferta agregada S y una demanda agregada D (figura 14.1). Estas dos curvas se cortan en p_1 y Q_1 . Estas combinaciones de precio y cantidad representan un equilibrio entre las demandas de los individuos y los costes (marginales) de las empresas. Dado el precio del mercado p_1 , las empresas maximizadoras del beneficio decidirán cuánto van a producir y en conjunto producirán Q_1 (el precio suministra información a las empresas con la que deciden cuánto deben producir). Por su parte, el precio sirve para racionar la demanda, dado p_1 las personas maximizadoras de la utilidad decidirán qué parte de su renta van a dedicar a la compra del bien, la demanda agregada a los precios p_1 será exactamente Q_1 .

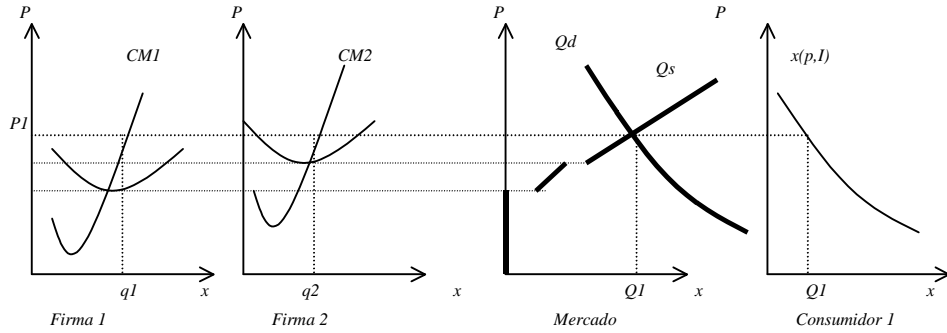
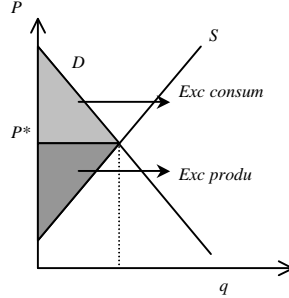


Figure 14.1: Equilibrio Competitivo a Corto Plazo

El bienestar en una economía suele medirse mediante la suma del excedente del productor y del consumidor (figura 14). El equilibrio competitivo, en ausencia de externalidades, es el resultado más eficiente que se puede dar y por lo tanto el que maximiza el bienestar de la sociedad. Sin embargo, este resultado puede generar inequidades; por lo tanto, cuando la inequidad quiere disminuirse es necesaria la intervención del Estado. Como veremos más adelante, el Estado puede lograr mayor equidad pero debe sacrificar cierta eficiencia.



Excedentes

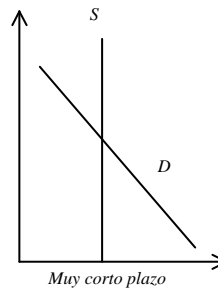
Example 91 Supongamos que la curva de demanda de la industria es lineal $X(p) = a - bp$ y que su curva de oferta es la de m empresas idénticas que se obtuvo anteriormente, $Y(p) = mp/2$. El precio de equilibrio resulta de igualar las dos ecuaciones, $p^* = \frac{2a}{2b+m}$. Esto implica que el precio de equilibrio disminuye conforme aumenta el número de empresas. Por su parte, las cantidades de equilibrio son $q^* = \frac{ma}{2b+m}$, es decir, las cantidades aumentan cuando aumenta el número de empresas.¹

En general, cuando la demanda tiene pendiente negativa, un aumento del número de empresas lleva a una disminución del precio y de las cantidades de equilibrio. Para mostrar esto utilizaremos la condición de equilibrio $Q_D(p_1) = Q_S(p_1)$, teniendo en cuenta que $Q_S(p_1) = mq_s(p_1)$, donde q_s son las cantidades que produce cada empresa.. Para averiguar cómo varía el precio cuando varía la cantidad de empresas diferenciamos la anterior expresión con respecto a m sabiendo que el precio depende de m . De esta forma obtendremos que $\frac{\partial p}{\partial m} = \frac{q_s(p)}{\frac{\partial Q_D}{\partial p} - m \frac{\partial q_s(p)}{\partial p}}$ llegando a la conclusión antes mencionada. ¿Qué pasa si no tiene pendiente negativa?

14.1 El equilibrio en el corto plazo

La curva en el corto plazo es perfectamente vertical o inelástica, dado que existe una cantidad fija del bien en el mercado. Cualquiera sea el precio de mercado, la industria está dispuesta a vender dicha cantidad del bien. Por lo tanto, la determinación de los precios depende únicamente de la demanda (figura 14.1).

¹Note que la derivada de q^* con respecto a m es positiva.



Equilibrio en el corto plazo

14.2 El equilibrio en el largo plazo y con libre entrada

En el largo plazo una empresa puede variar todos sus factores y acoplarse a la situación de mercado. Si una empresa experimenta pérdidas a largo plazo, no hay razón para que permanezca en la industria, por lo que se espera que salga de ella y reduzca sus pérdidas a cero. Es por eso que en este caso, la curva de oferta se dará cuando el costo marginal este por encima del costo medio.

Si una empresa está obteniendo beneficios, es natural que entren nuevas firmas a esa industria. Esto se debe a que en el largo plazo cualquier empresa puede adquirir los mismos factores y producir la misma cantidad al mismo costo. En la mayoría de las industrias competitivas no hay restricción a la entrada de empresas; en este caso, decimos que hay libre entrada. Sin embargo, en algunos mercados existen barreras de acceso, que pueden ser legales.

La adquisición de factores fijos y la libre entrada hace que a medida que entran más empresas en la industria y salen otras, la cantidad total producida varíe y altere el precio de mercado. Así, si las empresas tienen la misma función de costos,² entre más empresas hallan, más es la cantidad ofrecida. Si los beneficios son positivos entrarán más empresas, aumentando la cantidad y haciendo que disminuya el precio. En el momento en que los beneficios se vuelven nulos la entrada de otra empresa inducirá a que baje más el precio y comiencen a tener beneficios negativos, produciendo la salida de empresas hasta estabilizarse de nuevo en beneficios nulos. Esto indica que la oferta es totalmente elástica porque a cualquier variación del precio las empresas reaccionaran entrando o saliéndose del mercado y de esta forma afectando las cantidades (figura 14.2).

Una empresa maximizadora y precio aceptante producirá la cantidad en la que el precio es igual al coste marginal, pero como en el largo plazo no van a existir beneficios positivos (libre entrada) es de suponer que los beneficios de las empresas (si todas tienen las mismas tecnologías, es decir ninguna tiene una

²El supuesto de que todas las firmas son idénticas es válido si se tiene en cuenta que cada una hace lo mismo que la que está ganando más beneficios.

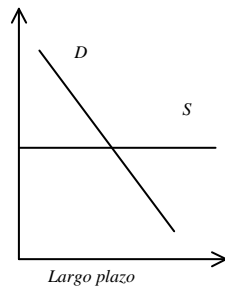


Figure 14.2: Equilibrio en el largo plazo

ventaja frente a las otras) sean nulos. Por lo tanto, el precio de equilibrio a largo plazo debe encontrarse cuando $CMg = CMe$.

Definition 92 *Una industria perfectamente competitiva se encuentra en equilibrio de largo plazo si las empresas maximizadores de los beneficios no tienen incentivos para entrar o salir de ella. Es decir, cuando $P = CMg = Cme$*

Sin embargo, estas consideraciones se cumplen en un mundo de perfecta competencia, donde la curva de oferta de largo plazo sería totalmente horizontal. Sin embargo en la realidad, siempre habrá un margen de ganancia pues no todas las empresas podrán reaccionar de la misma forma. De todas maneras, si hay un número razonable de empresas a largo plazo, el precio de equilibrio no puede alejarse del costo medio mínimo. Lo que implica que en una industria competitiva donde la entrada es libre, los beneficios no pueden alejarse mucho de cero, pues si son elevados, otras empresas entrarán presionando a la baja los beneficios. Así, la figura 14.3 muestra una curva de oferta de largo plazo más real.

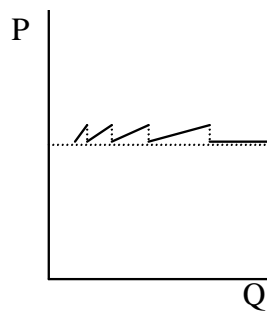


Figure 14.3: Oferta agregada real de largo plazo

Sin embargo, una oferta totalmente horizontal es una buena aproximación de esta. Note que ésta será la oferta de largo plazo que tendría una empresa con rendimientos constantes a escala. Esto se da porque pueden entrar empresas con los mismos insumos y produciendo lo mismo, de tal forma que la producción aumenta en la misma proporción y esos son precisamente rendimientos constantes a escala.

Dadas las anteriores consideraciones, en el equilibrio competitivo de largo plazo, se quisiera determinar no solamente el precio y los niveles de producción de las firmas sino también el número de firmas que están activas en la industria. Para determinar cual es el número de empresas de equilibrio en un mercado competitivo se hallan las curvas de oferta agregada con varios números de firmas y con cada una se examina cual sería el precio y la cantidad de equilibrio. Posteriormente, se determina el número máximo de empresas que permiten que en el equilibrio los beneficios de cada una sean no-negativos. Es decir, el punto en el que si entrara una empresa más, se incurriría en pérdidas. A continuación se ofrece un ejemplo al respecto.

Example 93 *Suponga que todas las empresas de una industria tienen la siguiente función de costos: $c(y) = y^2 + 1$. Así, el nivel de producción correspondiente cuando los beneficios son nulos se halla igualando el coste medio con el costo marginal; es decir, cuando $y = 1$, el costo medio y el costo marginal son iguales a 2.*

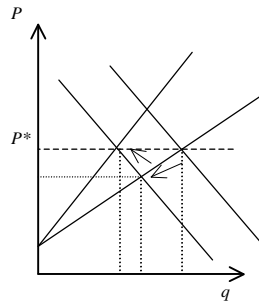
De acuerdo con el modelo de libre entrada, entrarán empresas en la industria mientras el precio no sea menor a 2. Continuando con el ejemplo anterior donde la demanda es lineal, sabemos que el precio de equilibrio es $p^ = \frac{2a}{2b+m}$. Así que en esta industria irá aumentando el número de empresas mientras el precio sea mayor que 2. Es decir, que el máximo número de empresas que puede entrar es $m_{LP} = a - 2b$. Note que esta es la misma cantidad que demandan agregadamente los consumidores. Esto se da porque a ese precio cada empresa produce de a una unidad.*

Como ya lo hemos visto antes y según la teoría vista, tanto las curvas de demanda como las curvas de oferta pueden desplazarse, a continuación se resumirá porque motivos se darán estos cambios.

Las curvas de demanda se desplazan	Las curvas de oferta se desplazan
Varía la renta	Varían los precios de los factores
Varían los precios de los bienes sustitutos o complementarios	Cambia la tecnología
Cambian las preferencias	Cambia el número de productores

Estos desplazamientos modificarán los precios de equilibrio, las cantidades de equilibrio o ambas. Suponga, por ejemplo, que el mercado del arroz está en equilibrio de largo plazo. Ahora suponga que hubo una disminución del ingreso de los hogares y eso llevó a que la demanda agregada de arroz se desplazar

hacia adentro. Esto hará que las cantidades demandadas y el precio del arroz disminuyan. Esto, a su vez, hará que las empresas productoras de arroz experimenten beneficios negativos en el corto plazo. Así que este choque llevará a que algunas empresas opten por salirse del mercado lo que implicaría una contracción de la oferta agregada hasta el punto donde el precio de equilibrio sea de nuevo igual al de largo plazo, pero esta vez con unas cantidades menores. (figura 14.2)



Equilibrio después de una contracción de la demanda

14.3 El control de los precios, los impuestos y cuotas de producción

Los gobiernos tratan de influir en los precios restringiendo a un precio máximo, estipulando impuestos a las cantidades a los precios, restringiendo las cantidades o bien otorgando subvenciones a sectores de la economía. Todos los ejemplos enunciados anteriormente pueden estudiarse en términos de sus efectos sobre el bienestar, el análisis se tomará desde la perspectiva de estática comparativa

14.3.1 El control de precios

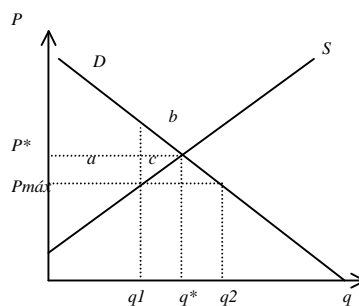
El control de precios puede ejercerse a través de precios máximos o precios mínimos.

Precios máximos

Cuando se establece un control de precios máximos (figura 14.3.1) se tendría que hay un aumento en el excedente del consumidor (representada por el rectángulo *a*) ya que los consumidores que aún pueden comprar el bien lo comprarían a un precio más bajo $p^{\max} < p^*$, pero también se disminuirá (triángulo *b*) ya que habrán consumidores que no pueden acceder al bien³ pues las cantidades

³Para conocer si el cambio en el excedente del consumidor es una pérdida o una ganancia dependerá de si la demanda es muy elástica o no

de equilibrio disminuirán de q^* a q_1 . Por su parte, el productor asume una pérdida de bienestar $a + c$. La pérdida total de la economía por esta medida esta dada por la pérdida irrecuperable $-b - c$ (ya que $\nabla EC = a - b$; $\nabla EP = -a - c$; $\nabla EC + \nabla EP = +a - b - a - c = -b - c$). También hay una escasez representada en que al p^{\max} los consumidores estarían dispuestos a demandar q_2 pero los productores sólo ofreceran q_1 por tanto la escasez será $q_2 - q_1$.



Precio Máximo

Un ejemplo de una regulación de un precio máximo sucedió en la década de los setenta cuando el precio del petróleo aumentó a niveles históricos. Ante este aumento, el gobierno de Estados Unidos no permitió vender la gasolina al precio real y fijó un tope máximo. Esto originó largas colas en las estaciones de servicio dada la escasez del combustible. Esta solución puede llevar a mayores ineficiencias y corrupción dado que la asignación de los recursos depende únicamente del criterio del productor.

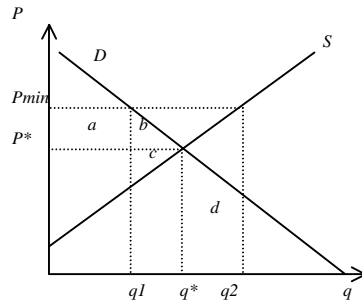
Precios mínimos

El gobierno también puede querer imponer un precio mínimo (e.g salario mínimo) y en algunos casos este precio mínimo puede estar por encima del precio de equilibrio, en este caso se tendría lo que se muestra en la figura 14.3.1. En este caso podrían darse dos escenarios. Puede que los productores prevean exactamente que no podrán vender más que q_1 y en este caso la pérdida neta de bienestar vendría dada por $-b - c$.

Pero si no preveen si no que producen q_2 , al precio p^{\min} los consumidores sólo demandarían q_1 la diferencia será el exceso de oferta que no es absorbida en el mercado. Los consumidores que aún pueden pagar por el bien lo harán a un precio mayor ($-a$) y algunos abandonan el mercado ($-b$) la pérdida en el EC será $= \nabla EC = -a - b$.

Los productores por su parte ganan una parte por la transferencia de los consumidores hacia ellos ($+a$) pero el descenso de las ventas causa una pérdida $-c$ además está produciendo q_2 y sólo están comprándole q_1 por tanto está incurriendo en un costo adicional no reembolsable representado por el trapecioide

d .⁴ Si los productores no prevén que sólo les demandaran q_1 su $\nabla EP = a - c - d$



Precio Mínimo

14.3.2 Los impuestos

Utilizando el modelo de oferta y demanda utilizado anteriormente, es útil indagar cuáles serían los efectos de una política económica impositiva. Se analizarán los impuestos sobre la cantidad y los impuestos sobre el valor. Inicialmente, cabe enfatizar que existirá una divergencia entre el precio pagado por el demandante y el precio recibido por el oferente (que significa el recaudo del Gobierno).

Impuesto sobre la cantidad

Es aquel en el cual se grava cada unidad que es comprada o vendida. Ejemplo la gasolina el productor recibe p_s y el demandante paga $p_s + t$ por tanto

$$p_d = p_s + t$$

El equilibrio estará dado por

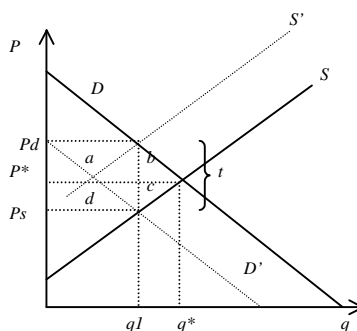
$$\begin{aligned} D(p_d) &= S(p_s) \\ &= S(p_d - t) \end{aligned}$$

de aquí se hallaría la cantidad de equilibrio q^1 para la cual

$$p_d(q^1) - t = p_s(q^1)$$

como se muestra en la figura 14.3.2 (la curva de oferta puede desplazarse hacia la izquierda o bien la demanda hacia abajo, el efecto será el mismo). El $\nabla EC = -a - b$, $\nabla EP = -d - c$, el recaudo del gobierno será $R = a + d$. Por tanto el efecto neto en el bienestar será $\nabla EC + \nabla EP + R = -a - b - d - c + a + d = -b - c$. Esta se llama la pérdida irrecuperable de eficiencia.

⁴Este trapecioide es el costo total de producir la diferencia $q_2 - q_1$ ya que la oferta es el costo marginal y esa área es la integral y por tanto el costo total



Impuesto a la cantidad

Para saber cómo se distribuirá la carga impositiva se podría analizar de la siguiente forma

$$p_d - p_s = t$$

utilizando pequeñas variaciones en los precios

$$dp_d - dp_s = dt \quad (14.1)$$

o lo que es equivalente a que

$$\frac{dp_d}{dt} - \frac{dp_s}{dt} = 1$$

Para que el equilibrio se mantenga debe suceder que

$$\begin{aligned} dD &= dS \\ \frac{\partial D}{\partial p} dp_d &= \frac{\partial S}{\partial p} dp_s \end{aligned} \quad (14.2)$$

utilizando 14.1 y 14.2 se tendría lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial p} dp_d &= \frac{\partial S}{\partial p} (dp_d - dt) \\ \frac{\partial D}{\partial p} dp_d &= \frac{\partial S}{\partial p} dp_d - \frac{\partial S}{\partial p} dt \\ dp_d \left(\frac{\partial D}{\partial p} - \frac{\partial S}{\partial p} \right) &= -\frac{\partial S}{\partial p} dt \\ \frac{dp_d}{dt} &= \frac{\frac{\partial S}{\partial p}}{\frac{\partial S}{\partial p} - \frac{\partial D}{\partial p}} \end{aligned} \quad (14.3)$$

multiplicando por p/q la ecuación 14.3 se tendrá

$$\frac{dp_d}{dt} = \frac{e_s}{e_s - e_d} \quad (14.4)$$

14.3. EL CONTROL DE LOS PRECIOS, LOS IMPUESTOS Y CUOTAS DE PRODUCCIÓN 187

donde e_s, e_d es la elasticidad precio de la oferta y la demanda respectivamente. Paralelamente, por el lado de la oferta se tendría

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{e_d}{e_s - e_d} \quad (14.5)$$

si $e_d \leq 0$ y que $e_s \geq 0$ se tendrá que

$$\begin{aligned} \frac{dp_s}{dt} &\leq 0 \\ \frac{dp_d}{dt} &\geq 0 \end{aligned}$$

Por tanto

- Si la demanda es perfectamente inelástica $e_d = 0 \rightarrow \frac{dp_d}{dt} = 1$ y el impuesto por unidad es pagado totalmente por los demandantes
- Si la oferta es elástica, $e_d = -\infty \rightarrow \frac{dp_s}{dt} = -1$ y el impuesto es pagado enteramente por los productores
- Si la oferta es totalmente elástica $e_s = \infty \rightarrow \frac{dp_d}{dt} = 1$ y el impuesto es pagado por los demandantes
- Si la oferta es perfectamente inelástica, $e_s = 0 \rightarrow \frac{dp_s}{dt} = -1$ y el impuesto es pagado por los productores.
- Y note que dividiendo 14.4 y 14.5 se tendrá

$$-\frac{\frac{dp_s}{dt}}{\frac{dp_d}{dt}} = -\frac{e_d}{e_s}$$

lo que dice que el agente que tiene respuestas menos elásticas (en valor absoluto) experimenta la mayor parte de la variación del precio provocada por el impuesto.

Esto tiene implicaciones bastante interesantes en el equilibrio de corto y largo plazo. Consideremos el caso en el que la entrada y la salida son libres. Supongamos que inicialmente se encuentra en equilibrio de largo plazo con un mínimo fijo de empresas y unos beneficios nulos. A corto plazo, el número de empresas es fijo y la curva de oferta de la industria tiene pendiente positiva. En el largo plazo, el número de empresas es variable, y la curva de oferta es horizontal en el nivel en el que el precio es igual costo medio mínimo. Supongamos que el equilibrio de mercado se da cuando la oferta de corto plazo corta con la oferta de largo plazo.

Suponga ahora que introducimos un impuesto a la industria, podemos desplazar la demanda o las ofertas. Como en el corto plazo la oferta es más bien inelástica, el precio que reciben las empresas es más bajo, lo que las lleva a tener

beneficios nulos. Estas pérdidas inducen a algunas empresas a abandonar las industrias, por lo que la oferta disminuye y el precio que pagan los consumidores sube aún más. Esto lleva a que en largo plazo, los consumidores tengan que pagar toda la carga del impuesto.

Resumiendo, en una industria en que la entrada es libre, un impuesto inicialmente eleva el precio que pagan los consumidores en una cantidad inferior a la cuantía total de mismo, ya que este recae en parte en los productores. A largo plazo, esto inducirá a que algunas empresas salgan del mercado, al reducirse la oferta se les traslada el costo a los consumidores ya que la oferta se vuelve completamente inelástica. De esta manera, los consumidores acaban soportando toda la carga impositiva. Lo importante de este análisis es reconocer que en la mayoría de los mercados gravados por el gobierno son los consumidores los que se están viendo más perjudicados, ya que las empresas reaccionan en el largo plazo.

Example 94 Sea $q^d = a - bp^d$ la demanda y, $q^s = c + dp^s$ la oferta del mercado. El equilibrio se da cuando el precio sea $p^d = p^s = \frac{a-c}{d+b}$ y las cantidades son $q^d = q^s = \frac{ad+cb}{b+d}$. Supongamos que se introduce un impuesto al mercado, ahora $p^d = p^s + t$. De esta forma, obtendremos que el equilibrio es $p^s = \frac{a-c-bt}{d+b}$ y $p^d = \frac{a-c+dt}{d+b}$.

Impuesto sobre el valor

Un impuesto sobre el valor es aquel que se expresa en unidades porcentuales

$$p_d = p_s(1 + \tau)$$

El análisis es exactamente igual que en el anterior, únicamente que el cambio de la curva de oferta o demanda no es de intercepto sino de pendiente.

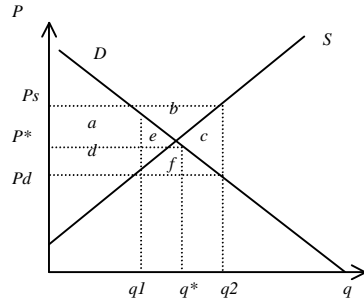
Subvenciones o subsidios

Es exactamente sólo que $t = -s$ es decir

$$p_d + s = p_s$$

El $\nabla EC = d+f$, $\nabla EP = a+e+b$; pago del gobierno $R = -a-b-c-d-e-f$. En el total de la economía sería Neto $= d+f+a+e+b-a-b-c-d-e-f = -c$ que es el costo en el que incurriría el gobierno al dar el subsidio (figura 14.3.2)

14.3. EL CONTROL DE LOS PRECIOS, LOS IMPUESTOS Y CUOTAS DE PRODUCCIÓN 189



Subsidio

Kahneman y Tversky (1984). Choices, values, and frames. *American Psychologist* 39: 341-50

Schelling 1979, micromotives and macrobehavior, new york norton

Elster (1979). Ulysses and the Sirens. o su libro más reciente Ulysses Unbound (2000).